Charla 6.

Estructura: Demostración partes I y II teorema del cono.
Demostración teorema de contracción.
MMP para K_X no nef.

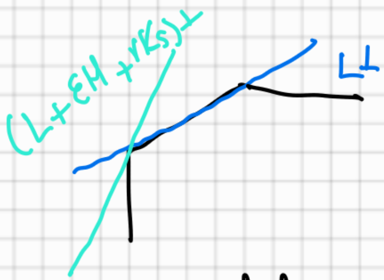
Lema: Si X es una superficie no singular cuyo canónico no es nef y A divisor amplio. Sea $r = \operatorname{Sup}\{t \in \mathbb{R}^+ \mid A + tK_X \text{ es nef}\} \in \mathbb{Q}$ por racionalidad, entonces $r = \frac{p}{q}$ con $q \in \{1,2,3\}$. (En general por $\dim(X)+1$).

Teorema del Cono:

* Parte I: Sea L un line bundle nef no amplio tal que $\overline{NE}(X)_{K_X<0} \cap L^{\perp} \neq \{0\}$

Entonces $\exists\, R_\ell$ rayo extremal tal que $R_\ell \subseteq \overline{NE}(X) \cap L^{\perp}$.

Idea: Podemos perturbar L por un amplio H de tal manera que $(L + \varepsilon H + rK_S)^{\perp} \cap \overline{NE}(X)$ corta una cara de $\overline{NE}(X)_{K<0}$ de dimensión inferior.



Dem: Sea H un divisor amplio, definimos:

$$r_L(n,H) = \operatorname{Sup}\{t \in \mathbb{R}^+ \mid nL + H + tK_X \text{ es nef}\}$$

por racionalidad sabemos que $r_L(n,H) \in \mathbb{Q}^{>0}$ y sabemos que su denominador está acotado, $r_L(n,H) = \frac{m(n)}{q}$. Ahora, notamos por definición que

$r_L(n,H) \leq r_L(n+1,H)$ y vemos que para $\xi \in \overline{NE}(X)_{K<0} \cap L^{\perp}$

se sigue que $(nL + H + r_L(n,H)K_X)\cdot\xi = H\cdot\xi + r_L(n,H)K\cdot\xi \geq 0$

$\Rightarrow r_L(n,H) \leq \frac{H\cdot\xi}{\ldots}$.

$-(K\cdot\xi)$

Esto implica que $r_L(n,H)=\frac{m(n)}{q}$ convergen, pero como $m(n)\in\mathbb{Z}$.

$\Rightarrow$ los $m(n)$ se estabilizan. (i.e $\exists$ n_0 tq $m(n)=m(n_0)$ $\forall n\geq n_0$

Entonces: Para $n\geq n_0$, $D(nL,H):=nL+H+r(H)K_X$ es nef no amplio $\Rightarrow$ $D(nL,H)^{\perp}\cap\overline{NE}(X)\neq\{0\}$.

- Observamos que $\boxed{D(nL,H)^{\perp}\subseteq\overline{NE}(X)_{K_X<0}}$.

Si $Z\in\overline{NE}(X)\setminus\{0\}\cap D(nL,H)^{\perp}$, entonces

$$0=Z\cdot(nL+H+r(H)K_X)=\underbrace{Z\cdot(nL+H)}_{>0}+r(H)Z\cdot K_X\Rightarrow Z\cdot K_X<0.$$

- Observamos que $\boxed{D(nL,H)^{\perp}\cap\overline{NE}(X)\subseteq L^{\perp}\cap\overline{NE}(X).}$

Si $Z\in\overline{NE}(X)\cap D(nL,H)^{\perp}$

$$0=Z\Big((n_0L+H+r(H)K_X)+(n-n_0)L\Big)=(n-n_0)(L\cdot Z)\geq 0$$

$\Rightarrow$ $L\cdot Z=0$.

Sabemos que si $F\not\subseteq\overline{NE}(X)_{K_X<0}$ esta nueva subcara $F_{D(nL,H)}$ está contenida propiamente en F, pero en el caso de que $F\subseteq\overline{NE}(X)$ comprobar que efectivamente que $F_{D(nL,H)}$ también está propiamente contenida en F.

A4 - 210 x 297 - Grid Size 4mm www.blocklayer.com

Algorítmicamente queremos producir caras de dimensión inferior.

- Sea $\dim(F)>1$ y $F_L\not\subseteq\overline{NE}(X)_{K\geq 0}$.

Tomemos $H_1, \dots, H_p$ base de $NS(X)$. con amplios y estudiamos los

$$D(n_i, L, H_i)\big|_{F_L} = \left(H_i + r_L(H_i)K\right)\big|_{F_L} \in (F_L)^{\vee}$$

Todas estas funciones no pueden ser 0. , porque $\Rightarrow H_i \equiv -r_L(H_i)K \ \forall i$
$\Rightarrow \dim(F_L) = 1$.

Por lo tanto, $D(n_i L, H_i)\big|_{F_L} \neq 0 \ \forall i \Rightarrow \dim\left(F_{D(n_i L, H_i)}\right) < \dim(F_L)$.

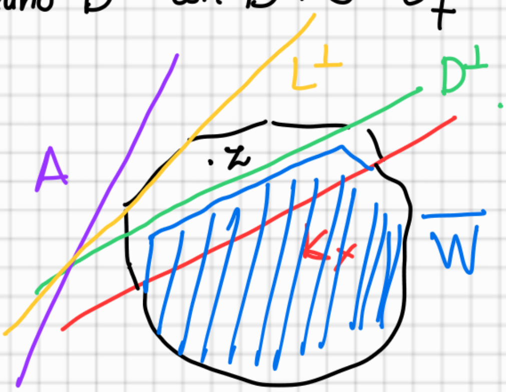
- De forma inductiva encontramos un rayo extremal con este procedimiento.
- De hecho, todas las subcaras se encuentran con este procedimiento variando H.

$\Rightarrow$ Son contables rayos extremales.

Paso II.

$$* \ \overline{NE}(X) = \overline{\left(\overline{NE}(X)_{K<0} + \sum_{\dim(F_\ell)=1} F_\ell\right)} = \overline{W}$$

Supongamos que no, entonces $\exists Z \in \overline{NE}(X) \setminus \overline{W}$. Por ser cerrados, notamos que $\exists$ hiperplano $D^{\perp}$ con $D>0$ tq $Z \cdot D < 0$ y $\overline{W} \subseteq \overline{NE}(X)_{D>0}$



Luego, notamos que para $A = nD - K_S$ con $n >> 0$ obtenemos un divisor amplio. (Redefinimos $A = D + rK_S$ con $r \in \mathbb{Q}^{<0}$). Luego, notamos que al aplicar rationality, se obtiene que $L = A + aK_S = D + (r+a)K_S$ es

nef, pero no amplio. Luego, existe $F_{L'} \subseteq F \cap \overline{NE}(X)_{K<0}$ rayo extremal

* Notamos lo siguiente:

- Por ser L nef, tenemos que $0 \leq L \cdot Z = D \cdot Z + (a+r)K_X \cdot Z < (a+r)K \cdot Z$

$\Rightarrow a + r < 0$.

• Si $F_{L'} = \mathbb{R}^{\geq 0} \ell \Rightarrow 0 = L\cdot \ell = D\cdot \ell + \underbrace{(a+r)K_X\cdot \ell}_{>0}$

$\Rightarrow D\cdot \ell > 0$ que es contradictorio.

Paso III: Los $\{R_i\}_{i=0}^{\infty}$ son discretos y por lo tanto $\sum_{i=0}^{\infty} R_i$ es cerrado.

Esto demostraría la parte II del enunciado del teorema del cono.

Teorema contracción extremal:

Para cada rayo extremal $F_{L'} \subseteq \overline{NE}(X)_{K<0}$ existe una única contracción extremal $\varphi = \mathrm{cont}_{R_\ell}: X \to Z$ (tal que $\varphi(C) = pt \Leftrightarrow [C] \in F_{L'}$).

Dem: Si $F_L = \overline{NE}(X) \cap L^{\perp}$. * Simplemente descompenemos en algo amplio y rK_X.

Sabemos que para $m >> 0$, $A = L - rK_X$ es amplio. Entonces $L = A + rK_X$ tiene la propiedad de ser semiamplio, $|\ell L|$ bpf. Entonces al tomar $\varphi_{|\ell L|}$ y su factorización de Stein, vemos que $\boxed{\begin{aligned}\Phi(C) = pt &\Leftrightarrow C\cdot L = 0\\ &\Leftrightarrow [C] \in F_L.\end{aligned}}$

• Conversamente, una contracción φ determina un rayo extremal. $L = \varphi^* H$. Vemos que si $L\cdot C = 0 \Rightarrow K_X\cdot C < 0$ y si $\varphi(C') = pt \Rightarrow \lambda[C] = [C']$. Claramente L es nef por fórmula de la proyección, tampoco amplio.

Notamos que $\overline{NE}(X) \cap L^{\perp} = \overline{NE}(X)_{K<0} \cap L^{\perp} = F_L$.

y F_L es rayo extremal.

• Clasificación de rayos extremales y el MMP.

* ¿Porqué los rayos extremales son generados por curvas?

* ¿Qué ...

* ¿ Que puede decir la contracción extremal sobre la geometría de X ?

Prop: Sea X no singular con K_X no nef y F_L rayo extremal en $F_L \subseteq \overline{NE}(X)_{K_X<0}$.

Entonces: i) $F_L = \mathbb{R}^{\geq 0}[E]$ con E curva(-1) y $cont_{F_L}$ el blow-down de E.

ii) $F_L = \mathbb{R}^{\geq 0}[F]$ con F una fibra de $cont_F : X \to Z$ $\mathbb{P}^1$-bundle.

iii) $F_L = \mathbb{R}^{\geq 0}[L]$ donde L es una línea en $\mathbb{P}^2$ con $cont_{\mathbb{P}^2} : \mathbb{P}^2 \to \{*\}$.

Dem: Sabemos que por el teorema de contracción F_L admite una $cont_{F_L} : X \to Z$ con $\dim(Z) = 0, 1, 2$.

- Si $\dim(Z) = 2$, sabemos que $L^2 > 0$ y que si $E \cdot L = 0$ $\Rightarrow E^2 < 0$. Además por la descomposición de bpf $\Rightarrow C \cdot K_X < 0$ $\Rightarrow E^2 = -1$. Notamos que $cont_{F_L}$ no contrae ninguna otra

Hodge

curva porque si $\varphi(C') = pt \Rightarrow C' \cdot E > 0$ y $C' \cdot E = E^2 < 0$ }. por def de contracción. $\Rightarrow F_L = \mathbb{R}^{\geq 0}[E]$.

- Si $\dim(Z) = 1$, sabemos que para la fibra genérica se tiene $F^2 = 0$ y $F \cdot K_X < 0 \Rightarrow F \cong \mathbb{P}^1$ y $K_X \cdot F = -2$.

* Cada componente de $cont_{F_L}$ es reducida.

Si $F = \sum^{K} n_i [C_i]$, por conexidad $C_1 \cdot C_2 > 0$, pero al tomar

$i=1$

la fibra genérica F_η y tenemos que $[F_\eta] = \lambda [C_2] \Rightarrow F_\eta \cdot C_1 = 0$ por ser disjunto Σ.

$\Rightarrow F = nC$. Pero, se sigue que $F^2 = n^2 C^2 = 0$

$$F \cdot K_X = n(C \cdot K_X) = -2$$

$\Rightarrow C \cdot K_X = -1$ y $n = 2$. (Esto contradice adjunción).

Por lo tanto, $\mathrm{Cont}_R : X \to Z$ es un $\mathbb{P}^1$-bundle y $F_L = \mathbb{R}^{\geq 0}[F]$.

- Si $\dim(Z) = 0 \Rightarrow \rho = 1$ y $-K_X$ amplio. Automáticamente tenemos que $F_L = \mathbb{R}^{\geq 0}[L]$ recta y por la condición de ρ y el anticanónico $\Rightarrow X \cong \mathbb{P}^2$.