El Teorema del Caso: No Singular VS Singular

I. Caso No Singular

Motivación:

Hallar modelo minimal proyectivo no singular para cualquier superficie X.

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r, "\exists"] \arrow[dr, "r.s."'] & S \arrow[d, "r.s."] \arrow[dl, phantom, "\circlearrowleft"] \\ & X \end{tikzcd}$$

Estrategia: Hacer todas las contracciones posibles.

Castelnuovo: $\underbrace{C \text{ contraíble}}_{\text{geométrico}} \iff \underbrace{C^2 = -1 \,,\; K_S C < 0}_{\text{numérico}}$

Conclusión Importante: S minimal $\iff$ K_S es nef

HMP para Superficies No Singulares (Pizarra Aux.)

Inicio
↓
S superficie proyectiva no singular ← $S := W$
↓
¿K_S es nef? → SI → S es modelo Minimal → Fin
↓ NO
$\exists \phi : S \to W$ contracción de curva racional
↓
¿$\dim W < \dim S$? → SI → $\phi : S \to M$ MFS → Fin

NO → $\phi : S \to W$ es la contracción de curva (-1), W: proy. no sing. → $S := W$

Todo se resume en conocer las curvas donde $K_S C < 0$

Es decir:

$$\overline{NE(S)} = \overline{NE(S)}_{K_S \geq 0} + \underbrace{\overline{NE(S)}_{K_S < 0}}_{\text{candidatos a ser curvas contraíbles}}$$

II. Caso Singular.

Definición. Sea S variedad normal tal que K_S es $\mathbb{Q}$-cartier y sea $\epsilon : \hat{S} \longrightarrow S$ resolución de singularidades.

Entonces:

$$K_{\hat{S}} = f^*(K_S) + \sum_i r_i E_i$$

donde la suma es sobre los divisores excepcionales irreducibles y los r_i son números racionales.

Entonces las singularidades se dicen:

$$\left.\begin{array}{lll} \text{Terminal} & : & \text{Si } r_i > 0 \\ \text{Canónical} & : & \text{Si } r_i \geq 0 \\ \text{Log Terminal} & : & \text{Si } r_i > -1 \\ \text{Log Canonical} & : & \text{Si } r_i \geq -1 \end{array}\right\} \text{para todo } i$$

Vamos a implementar MMP para Superficies Singulares con singularidades Log Terminal.

Lo primero que generalizamos es:

$$K_S \text{ no es nef} \iff \underset{\text{contracción extremal}}{\exists \phi : S \longrightarrow W}$$

¿Por qué funciona en el caso suave? Rpta. Castelnuovo

Sketch of proof: (Matsuki)

Tomar A muy amplio. E curva excepcional (-1) a contraer.

Entonces:

$$L = A + rE \quad , \quad r = H.E$$

induce la contracción:

$$\varphi_{|L|} : S \longrightarrow \mathbb{P}^N \qquad \blacksquare$$

Ahora damos la vuelta las cosas:

Considerar A divisor amplio arbitrario, tomar:

$$L = A + rK_S \quad ; \quad r \in \mathbb{R}$$

tal que:

$$r = \sup\{t \mid A + tK_S \text{ es nef}\}$$

De aquí se tiene que algún múltiplo de L es nuestro candidato para definir la contracción:

$$\varphi_{|mL|} : S \longrightarrow \mathbb{P}^N$$

Para esto se necesitan los teoremas:

Teo. Racionalidad: $\quad r \in \mathbb{Q}$

Teo. Base Point Free: $m \gg 0 \Rightarrow \varphi_{|mL|}$ es morfismo

Estos teoremas son válidos para el caso singular:

Teo. Racionalidad: Sea X sup. con singularidades lt, tal que K_X no es nef.

Sea $a(X) > 0$ entero tal que $a(X) K_X$ es Cartier.

Sea H nef y big definimos:

$$r = r(H) = \max\{t \in \mathbb{R} \mid H + tK_X \text{ nef}\}$$

$$\Rightarrow r \in \mathbb{Q} \quad \text{con} \quad r = u/v \quad \text{donde } 0 < v \leq a(X)(\dim X + 1)$$

Teo. Base Point Free: X sup. con singularidades log terminal. D nef tq $aD - K_X$ nef y big para algún $a > 0$.

Entonces $|bD|$ es bpf para $b \gg 0$.

Resultado: Existe rayo extremal R tal que

$$R \cdot K_X < 0 \quad , \quad R(H + rK_X) = 0$$

La segunda observación a generalizar es:

C curva irreducible es contraíble $\iff$ C es racional (Bend & Break)
C es extremal (Contracción)

Esto se ve reflejado en el Teorema del Cono:

Teorema del Cono. Sea X lt.

1. Existen contables curvas racionales $C_J \subseteq X$ tal que $0 < -K_X C_J \leq 2 \dim X$ y además:

$$\overline{NE(X)} = \overline{NE(X)}_{K_X \geq 0} + \sum \mathbb{R}_{\geq 0}[C_J]$$

(2) Para todo $\varepsilon > 0$ y H $\mathbb{Q}$-div. amplio:

$$\overline{NE(X)} = \overline{NE(X)}_{K_X + \varepsilon H \geq 0} + \sum_{\text{Finito}} \mathbb{R}_{\geq 0}[C_J]$$

(3) $F \subseteq \overline{NE(X)}$ K_X negativa cara extremal.
$\exists!\ \mathrm{cont}_F : X \to Z$ var. proyectiva tal que $C \subseteq X$ curva irreducible se mapea a un punto si y sólo si $[C] \in F$.

(4) Sean F y $\mathrm{cont}_F : X \to Z$ como en (3).
Sea $L \subseteq X$ curva tal que $L \cdot C \equiv_F 0$

$\Rightarrow \exists L_Z \subseteq Z : L \simeq \mathrm{cont}_F^{*} L_Z$

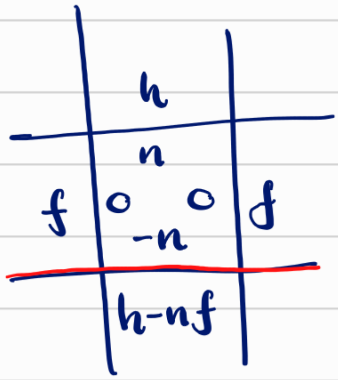
Caso NO SINGULAR:

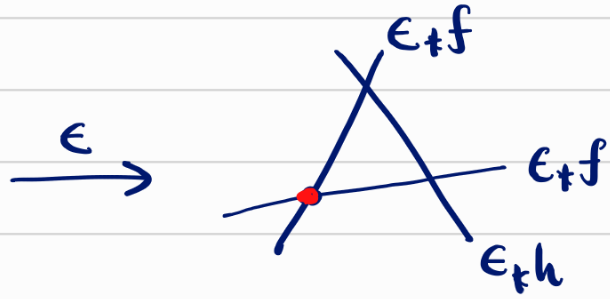
$\rho(S) = 1 \Rightarrow \mathbb{P}^2$
$\rho(S) = 2 \Rightarrow \mathbb{P}(\mathcal{E})$
$\rho(S) \geq 3 \Rightarrow$ curvas ext. aut. inter neg

C extremal. $K_S \cdot C < 0$
$C^2 > 0$, $S = \mathbb{P}^2$, pt.
$C^2 = 0$, $S = \mathbb{P}(\mathcal{E})$, fibra
$C^2 < 0$, contracción

Caso SINGULAR: ?

Ejemplo: La contracción $\mathbb{F}_n \xrightarrow{\epsilon} \overline{\mathbb{F}_n}$





$\epsilon_* h = n\,\epsilon_* f$

$NS(\mathbb{F}_n) = \mathbb{Z}[h-nf] \oplus \mathbb{Z}[f]$

$K_{\mathbb{F}_n} = -\left(2h + (2-n)f\right)$

$NS(\overline{\mathbb{F}_n}) = \mathbb{Z}[\epsilon_* f]$

$K_{\overline{\mathbb{F}_n}} = -(n+2)\,\epsilon_* f$

$$\overline{NE(\mathbb{F}_n)} = \underbrace{\mathbb{R}_{\geq 0}[h-nf]}_{K_{\mathbb{F}_n} \geq 0} \oplus \underbrace{\mathbb{R}_{\geq 0}[f]}_{K_{\mathbb{F}_n} < 0}$$

$$\overline{NE(\overline{\mathbb{F}_n})} = \underbrace{\mathbb{R}_{\geq 0}[\epsilon_* f]}_{K_{\overline{\mathbb{F}_n}} < 0}$$

Calculo de $(\epsilon_* f)^2$:

$$0 = \epsilon^* \epsilon_* f \cdot (h-nf) = \left(f + r\,(h-nf)\right)(h-nf)$$

$$0 = fh + r(-n) \Rightarrow \quad r = \tfrac{1}{n} \quad \text{es singularidad terminal.}$$

Luego: $\epsilon^* \epsilon_* f = f + \frac{1}{n}(h-nf)$

Entonces $\epsilon_* f \cdot \epsilon_* f = \epsilon^* \epsilon_* f \cdot f = \frac{1}{n}$

Obs.

$$K_{\overline{\mathbb{F}_n}} \cdot \epsilon_* f = -(n+2)\cdot(\epsilon_* f)^2 = -\frac{n+2}{n} < 0$$

Se tiene $(\epsilon_* f)^2 > 0$ pero $\epsilon_* f \cdot K_{\overline{\mathbb{F}_n}} < 0$