Cónicas e intersecciones en el plano proyectivo

Benjamín Macías Quezada

14 de agosto, 2024

El intersectar un cono en $\mathbb{R}^3$ con un plano resulta en distintas curvas dependiendo de la inclinación de dicho plano, a saber, podemos obtener una circunferencia, elipse, parábola, o hipérbola—las llamadas *secciones cónicas*. De nuestro curso de Introducción a la Geometría, sabemos que dichas secciones cónicas son de hecho conjuntos algebraicos, por lo que podemos estudiarlas desde el punto de vista de Geometría Algebraica. Lo que hoy nos convoca es su teoría de intersecciones. Más concretamente, queremos describir qué ocurre cuando intersectamos dos cónicas.

El ambiente natural en Geometría Algebraica son los espacios proyectivos, y nosotros no hacemos excepción, principalmente porque los resultados sobre intersecciones se presentan "más limpios" que en espacios afines, en el que aparecen muchas posibilidades. Así, antes de centrarnos en el problema de las intersecciones de cónicas, es conveniente deternos a definir rápidamente los conceptos que usaremos en esta exposición. Seguiremos [Ful08, Ch. 4.1–2].

1. Plano proyectivo

La geometría proyectiva viene de la simple observación de que, en la vida real, dos rectas paralelas (pensar en los bordes de una vereda, o los rieles en las vías de un tren) se "intersectan en el horizonte". Esta idea se puede formalizar axiomáticamente de modo similar a como hizo Euclides en su momento, pero la pedagogía moderna ha decantado por ignorar ese enfoque, y utilizar coordenadas directamente. No nos detendremos a estudiar los axiomas de la geometría proyectiva, ni cómo estos se traducen a la definición en coordenadas que estamos a punto de estudiar (lo que no es nada evidente).

Dado un cuerpo k, el *plano proyectivo sobre* k es el conjunto de todas las rectas por el origen de k^3, y lo escribimos $\mathbb{P}^2_k$. Equivalentemente, es el cociente

$$k^3 - \{0\}/v \sim \lambda v,$$

de puntos de k^3 donde identificamos dos puntos si están en la misma recta por el origen. Por tanto, un punto en $\mathbb{P}^2_k$ queda únicamente determinado por cualquier representante de la recta por el origen en la que habita. Se suele usar la notación $[x_0 : x_1 : x_2]$ para puntos en $\mathbb{P}^2_k$ (en vez de $[(x_0, x_1, x_2)]$). Esta construcción se generaliza directamente a cualquier dimensión, pero trabajaremos en el plano.

El definir conjunto algebraico (lugar de ceros) en el plano proyectivo en un poco más delicado, porque el evaluar un polinomio en un punto de $\mathbb{P}^2$ puede no estar bien definido pues para distintos representantes del mismo punto (es decir, puntos distintos en la misma recta por el origen en k^3), pueden evaluar a valores distintos. Así, un punto $P \in \mathbb{P}^2$ será un *cero* de un polinomio $F \in k[x_0, x_1 : x_2]$ si lo es para cada representante de P en k^3. Esto último puede ocurrir si y solo si F es de hecho un polinomio *homogéneo*, lo que permite definir, dado un conjunto de polinomios homogéneos $S \subseteq k[x_0, x_1, x_2]$, su *lugar de ceros (homogéneo)* como el conjunto

$$\mathbb{V}(S) := \big\{P \in \mathbb{P}^2 \colon F(P) = 0 \text{ para cada } F \in S\big\}.$$

Lo conjuntos de esta forma se llaman *conjuntos algebraicos (proyectivos)* de $\mathbb{P}^2$, y cuando no se puedan escribir como unión de dos conjuntos algebraicos más pequeños los llamaremos *irreducibles*. Un conjunto algebraico proyectivo irreducible se llama *variedad proyectiva*.

Ejemplo: rectas planas

En el plano proyectivo $\mathbb{P}^2_k$, una *recta* es el lugar de ceros de un polinomio homogéneo de grado 1 en tres variables con coeficientes en k, es decir, los puntos $[x : y : z] \in \mathbb{P}^2_k$ tales que

$$ax + by + cz = 0,$$

para algunos $a, b, c \in k$ fijos. Cada punto en $\mathbb{P}^2$ define una recta por el origen en k^3, y como cada recta en $\mathbb{P}^2$ es una colección de puntos proyectivos, estas definen planos por el origen en k^3.

Consideremos dos rectas distintas en $\mathbb{P}^2$. Viéndolas como planos en por el origen en $\mathbb{R}^3$, notamos que su intersección es una recta por el orgien en $\mathbb{R}^3$, que a su vez define un punto proyectivo en $\mathbb{P}^2$. Conclusión:

Proposición 1. *En $\mathbb{P}^2$, todo par de rectas distintas se interesctan en un punto.*

Ejemplo: cónicas planas

Una cónica es el lugar de ceros de un polinomio cuadrático. En el caso afín, ellos corresponden a

$$q(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f,$$

con coeficientes en un cuerpo k. Para obtener *cónicas* en el plano proyectivo debemos homogenizar. Para ello, simplemente consideramos una tercera variable z y escribimos

$$Q(x, y, z) = ax^2 + bxy + cy^2 + dxz + eyz + fz^2 \in k[x, y, z],$$

de modo que $\mathbb{V}(Q) \subseteq \mathbb{P}^2$.

La clasificación de las cónicas afines en k^2 es algo larga. A saber, están la elipse, hipérbola, y la parábola llamadas las cónicas *no-degeneradas*, pero también hay otros ocho casos *degenerados*: un singleton, el vacío, una recta, dos rectas con un punto en común, dos rectas paralelas, la recta doble. Como en el caso de dos rectas, la clasificación es considerablemente más simple y consiste en:

Teorema 2. *Toda cónica en $\mathbb{P}^2$ es (salvo un cambio de coordenadas) una de las definidas por las ecuaciones siguientes:*

1. *Cónica (proyectiva) no-degenerada: $x^2 + y^2 - z^2$.*
2. *Vacío: $x^2 + y^2 + z^2$.*
3. *Par de rectas: $x^2 - y^2$.*
4. *Un punto $x^2 + y^2$.*
5. *Recta doble: x^2.*

2. Intersecciones para rectas y cónicas

El Teorema de Bézout indica que dadaos dos curvas proyectivas de grado m y n respectivamente, la cantidad de puntos en los que se intersectan es exactamente mn, siempre y cuando estemos trabajando en un cuerpo algebraicamente cerrado y contemos las multiplicidades "de forma adecuada". El trabajar sobre $\mathbb{P}^2$ nos permite contar las intersecciones "al infinito". De momento no sabemos qué significa "de forma adecuada", pero de todos modos podemos entregar un resultado decente:

Proposición 3. *Dada una recta L (o, C una cónica no-degenerada) en $\mathbb{P}^2$ y D una curva plana de grado d (que no se contengan mutuamente) supongamos definido por la ecuación $G = 0$, $G \in k[X, Y, Z]$ se tiene que*

$$\#(L \cap D) \leq d$$
$$\#(C \cap D) \leq 2d.$$

Demostración. L se puede parametrizar genéricamente como

$$\begin{aligned}\Phi\colon \mathbb{P}^1 &\longrightarrow \mathbb{P}^2\\ [U:V] &\longmapsto [a([U:V]):b([U:V]):c([U:V])],\end{aligned}$$

donde $a,b,c\in k[U,V]$ son algunas formas lineales. También, cualquier cónica no-degenerada C es equivalente a la curva definida por la ecuación $XZ-Y^2$ (bajo el cambio de variables $(X,Y,Z)\mapsto(X+Z,Y,Z-X)$). Una parametrización de C es dada por

$$\begin{aligned}\Psi\colon \mathbb{P}^1 &\longrightarrow \mathbb{P}^2\\ [U:V] &\longmapsto [U^2:UV:V^2].\end{aligned}$$

Así, los puntos de intersección son dados por $[U:V]\in\mathbb{P}^1$ tales que

$$G(\Phi([U:V]))=0$$

(resp. $G(\Psi([U:V]))=0$). La pregunta natural es, ¿cómo calculamos la multiplicidad de un cero de un polinomio homogéneo? Consideremos el caso de la cónica definida por $F(U,V):=a_2U^2+a_1UV+a_0V^2$, que define un polinomio no-homogéneo

$$f(u):=F(u,1)=a_2u^2+a_1u+a_0.$$

Así, si $f(\alpha)=0$, entonces $F(\alpha,1)=0$. Por tanto, los ceros ordinarios de f corresponden a ceros de F, salvo por el punto $[1:0]$. Evaluando directamente,

$$F(1:0)=0 \iff a_2=0 \iff \deg f<2,$$

por lo que es razonable definir la multiplicidad del punto al infinito como $2-\deg f$. Esto claramente se adapta a polinomios homogéneos de cualquier grado, en particular a nuestro G.

Los puntos $[U:V]$ que satisfacen lo buscado son ceros de G, que en cualquier caso son menores o iguales a d. □

En el caso que D sea otra cónica, este resultado indica que $\#(C\cap D)\le 4$, pero el Teorema de Bézout indica que se debe alcanzar la igualdad. Para obtenerla, debemos contar multiplicidades correctamente, que es lo que hacemos en la siguiente sección.

3. Multiplicidad de intersección

La definición de número de intersecciones es algo estotérica y por temas de tiempo no alcanzamos a motivarla debidamente. Dadas F,G curvas planas proyectivas, y $P\in\mathbb{P}^2$, el *número de intersección* de F y G en P es

$$I(P,F\cap G):=\dim_k\left(\frac{\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2,P}}{(F,G)}\right).$$

Con esta noción la Proposición anterior se vuelve precisa, y obtenemos que

$$\sum_{P\in\mathbb{P}^2} I(P,C\cap D)=\deg C\cdot\deg D=4.$$

Probar que el número de intersección efectivamente satisface propiedades deseables (que de hecho lo definen únicamente) es no-trivial (cf. [Ful08, pp. 36-9]). Usaremos el resto de la exposición para definir los conceptos que aparecen en la definición de número de intersección, y dar un ejemplo de intersecciones de dos cónicas.

Dado un conjunto $X\subseteq\mathbb{P}^n$, su *ideal (homogéneo)* es el conjunto

$$\mathbb{I}(X):=\{F\in k[x_0,\dots,x_n]\colon F(P)=0 \text{ para cada } P\in X\}.$$

Es un ideal de $k[x_0, \dots, x_n]$, y es *homogéneo* en el sentido que cuando escribimos un $F \in I$ como suma de sus partes homogéneas de cada grado, $\sum_{i=1}^{m} F_i$, se tenga también que cada $F_i \in I$. Equivalentemente, un ideal es homogéneo si y solo si es generado por polinomios homogéneos.

Cuando $X \subseteq \mathbb{P}^n$ es variedad proyectiva, se tiene que $\mathbb{I}(X)$ es ideal primo, y por tanto el anillo

$$k[X] := k[x_0, \dots, x_n]/\mathbb{I}(X),$$

llamado *anillo de coordenadas de* X, es un dominio enterno. Así, tiene cuerpo de fracciones

$$k_{\mathrm{h}}(V) := \mathrm{Frac}(k[X])$$

bien definido, y lo llamamos el *cuerpo de funciones homogéneo* de X. En general, los elementos de $k[X]$ o $k_{\mathrm{h}}(V)$ no definen funciones $X \to k$. Esto sí ocurre para el caso especial cuando numerador y denominador son del mismo grado. Con esto, consideramos el subcuerpo de $k_{\mathrm{h}}(X)$,

$$k(X) := \left\{ h \in k_{\mathrm{h}}(X) \colon h = \frac{f}{g} \text{ para algunos } f, g \in k[X] \text{ homogéneos del mismo grado, con } g \neq 0 \right\},$$

llamado el *cuerpo de funciones* de X. Los elementos de $k(X)$ se llaman genéricamente *funciones racionales* en X.

Dado $P \in X$, la colección de todas las funciones racionales definidas en P,

$$\mathcal{O}_{X,P} := \left\{ \frac{f}{g} \in k(X) \colon g(P) \neq 0 \right\}$$

es un subanillo de $k(X)$, llamado el *anillo local* de X, pues es un anillo local, de ideal maximal

$$\mathfrak{m}_{X,P} := \left\{ \frac{f}{g} \in \mathcal{O}_{X,P} \colon f(P) = 0 \right\}.$$

Se tiene el isomorfismo de anillos

$$\mathcal{O}_{X,P} \cong k[X]_{\mathfrak{m}_{X,P}}.$$

Ejemplo: intersectando dos cónicas

Consideremos las cónicas no-degeneradas definidas por la ecuaciones $x^2 - yz = 0$ y $x^2 + z^2 - yz = 0$. Mirando en cartas afines, es directo que se intersectan en el punto $P := [0 : 1 : 0]$. Ahora, queremos calcular

$$\dim_k \left(\frac{\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2,P}}{(x^2 - yz, x^2 + z^2 - yz)} \right).$$

En la carta $y = 1$,

$$\begin{aligned} \frac{k[x,z]_{\mathfrak{m}_{\mathbb{P}^2,P}}}{(x^2 - z, x^2 + z^2 - z)} &= \frac{k[x,z]_{\mathfrak{m}_{\mathbb{P}^2,P}}}{(x^2 - z, z^2)} \\ &= \frac{k[x]_{\mathfrak{m}_{\mathbb{P}^2,P}}}{(x^4)} \\ &= \left(\frac{k[x]}{(x^4)} \right)_{\mathfrak{m}_{\mathbb{P}^2,P}} \\ &= \frac{k[x]}{(x^4)}, \end{aligned}$$

que ciertamente tiene $\dim_k = 4$. Las dos últimas igualdades no son gratuitas: es un resultado estándar de álgebra que localizar y tomar cocientes conmutan, y el cociente que queda una vez conmutados ya es local, por lo que localizar no cambia el anillo resultante. $\square$

Referencias

[Ful08] William Fulton, *Algebraic curves*, Online, 2008.