GEOMETRÍA DE LAS INCRUSTACIONES DE SEGRE Y VERONESE

BENJAMÍN MALDONADO VILLALOBOS

Date: 22 de Agosto, 2024.

Todas las definiciones usadas en este documento fueron sacadas del texto "Algebraic Geometry" de Robin Hartshorne [Har77]. Ejemplos y los temás en más extensión se pueden encontrar en [Sha13].

Además los temas expuestos son basados en problemas del capitulo 2 y 3 de [Har77]. Este documento fue escrito como apunte para una charla introductoria en el seminario de geometría algebraica.

Está dividia en tres partes, una breve introducción a los morfismos entre variedades, la incrustación de Segre y la incrustación de Veronese. Estas dos incrustaciones son fundamentales en el estudio de la geometría algebraica clásica.

Nota. En la charla anterior se definieron los conjuntos algebraicos. Resulta ser que para el espacio proyectivo (y afín) estos resultan ser los cerrados de una topología. A esta topología la llamamos, la topología de Zariski.

Definición 1 (Cuasi)**.** Diremos que una variedad es cuasi-afín (respectivamente proyectiva) si es un abierta contenido en una variedad afín (respectivamente proyectiva).

Nota. Esta definición es bien relevante, pues en la topología de Zariski, los abiertos son grandes, entonces estudiar variedades cuasi-afines nos da mucha información de las variedades afines.

Definición 2 (Hipersuperficie)**.** Sea f un polinomio irreducible en $k[x_1, \ldots, x_n]$ entonces diremos que $Z(f)$ es una hipersuperficie. En el caso en que $n = 3$ diremos que es una superficie.

Definición 3 (Hiperplano)**.** Si f es un polinomio homogéneo lineal diremos que su lugar de ceros $Z(f)$ es un hiperplano.

1. Morfismos y funciones racionales

Así como estudiamos funciones que preservan estructura para grupos, anillos, módulos y cuerpos, nos gustaría estudiar algún tipo particular de función que preserve la estructura de variedad algebraica. Para lograr definir una noción de morfismo adecuada, primero tenemos que definir lo siguiente:

Definición 4 (Función regular)**.** Sea Y una variedad cúasi-afín contenida en $\mathbb{A}^n$. Diremos que $f\colon Y \to k$ es regular en el punto $y \in Y$ si existe una vecindad U de y tal que existen polinomios $g, h \in k[x_1, \ldots, x_n]$ con h no nula en U y

$$f = \frac{g}{h}$$

en U.

Nota. Básicamente lo que nos dice esta definición es que localmente nuestra función es racional. Diremos que nuestra función es regular en Y si es que es regular en todo punto de Y.

Nota. Para definir función regular para variedades cuasi-proyectivas en vez de considerar simplemente polinomios, los consideramos homogéneos del mismo grado.

Lema. *Sea $f\colon Y \to k$ una función regular. Si identificamos a k como el espacio afín $\mathbb{A}^1$, entonces f es continua.*

Esta lema anterior nos da un guiño de que estamos yendo en buena dirección, porque lo mínimo que nos gustaría es que al trabajar a nivel topológico se comporten bien las funciones que vayamos a definir.

Como queremos trabajar en toda generalidad sobre variedades, afines, proyectivas, cuasi-afines o cuasi-proyectivas llamaremos a una **variedad** a un espacio que es uno de los anteriores.

Definición 5 (Morfismo)**.** Sean X, Y variedades sobre un cuerpo algebraicamente cerrado. Diremos que $\varphi\colon X \to Y$ es un morfismo si:

a) Es una función continua,

b) Para todo abierto $V \subset Y$ y para toda función regular $f\colon V \to k$ se tiene que $f \circ \varphi\colon \varphi^{-1}(V) \to k$ es una función regular.

Esto, para las mentes inquietas, forma una categoría con objetos las variedades y morfismos los morfismos de variedades.

Un isomorfismo de variedades es una morfimos que admite un morfismo inverso. Se puede notar que ser homeomorfos es una condición necesaria, más bien no suficiente. En conclusión, ser isomorfos como variedades es más fuerte que ser homeomorfos.

Ejemplo. Consideremos el mapa $\phi\colon \mathbb{A}^1 \to \mathbb{A}^2$ dado por $t \mapsto (t^2, t^3)$. Este mapa es un homeomorfismo a la curva $Z(y^2 - x^3)$, pero no es un isomorfismo de variedades.

Lema. *Sean X, Y variedades. ψ y φ morfismos entre X e Y. Si coinciden en un abierto de X, entonces coinciden en todo X.*

Definición 6 (Mapa racional)**.** Sean X, Y variedades. Un mapa racional $\varphi\colon X \to Y$ es una clase de equivalencia de un par $\langle U, \varphi_U\rangle$ donde U es un abierto no vacío en X y φ_U es un morfismo de U hacia Y.

Diremos que dos mapas racionales $\langle U, \varphi_U\rangle$ y $\langle V, \varphi_V\rangle$ son equivalentes si los morfismos φ_U y φ_V coinciden en $U \cap V$ (o un abierto contenido en la intersección).

2. Incrustación de Veronese

Ahora construiremos un mapa (que luego demostraremos es un isomorfismo a su imagen) que nos permite entender a $\mathbb{P}^n$ como sub-variedad de un espacio proyectiva de dimensión mayor.

Este mapa se define de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} v_{n,d}\colon \mathbb{P}^n &\longrightarrow \mathbb{P}^{N-1} \\ x = (x_0 : \cdots : x_n) &\longmapsto (M_0(x) : \cdots : M_N(x)) \end{aligned}$$

donde N es la cantidad de monomios de grado d en $n+1$ variables $\binom{n+d}{n}$. Este mapa es un homeomorfismo a su imagen y más aún es un isomorfismo a su imagen!

Nota. Con este mapa uno define la **curva racional normal** de grado d como la imagen de $v_{1,d}$.

Ejemplo (La curva racional normal de grado 2)**.** Los monomios de grado dos en dos variables son: x^2, xy, y^2. Entonces la incrustación de Veronese está dada por

$$\begin{aligned} v_{1,2}\colon \mathbb{P}^1 &\longrightarrow \mathbb{P}^2 \\ (x : y) &\longmapsto (x^2 : xy : y^2) \end{aligned}$$

Ahora vamos a enunciar teoremas que se cumplen en total generalidad, pero los explicaremos por medio de este ejemplo y otro que veremos más adelante. Resulta ser que la imagen de este mapa y de cualquier Veronese es una variedad, en específico tenemos que

$$v_{1,2}(\mathbb{P}^1) = Z(y^2 - xz)$$

Ahora comprobemos que es un isomorfismo a su imagen. Para aquello tomamos las cartas afines $U_0, U_1, U_2 \subset \mathbb{P}^2$ y vemos la preimagen de su intersección con la imagen del Veronese. Obtenemos

$$v_{1,2}^{-1}(U_0 \cap v_{1,2}(\mathbb{P}^1)) = \big\{(x:y) \in \mathbb{P}^1 : x \neq 0\big\} = D(x) = \mathbb{P}^1 \setminus \{(0:1)\}$$

$$v_{1,2}^{-1}(U_1 \cap v_{1,2}(\mathbb{P}^1)) = \mathbb{P}^1 \setminus \{(1:0),(0,1)\}$$

$$v_{1,2}^{-1}(U_2 \cap v_{1,2}(\mathbb{P}^1)) = \big\{(x:y) \in \mathbb{P}^1 : y \neq 0\big\} = D(y) = \mathbb{P}^1 \setminus \{(1:0)\}$$

Ahora estudiamos el mapa de Veronese restringido a estos dominios en U_0 nos da (bajo un cambio de coordenadas que es reescalar por $\frac{1}{x}$)

$$\begin{aligned} v_{1,2} \colon \mathbb{P}^1 \setminus \{(0:1)\} &\longrightarrow \mathbb{P}^2 \\ (1:p) &\longmapsto (1:p:p^2) \end{aligned}$$

que es regular pues es un mapa definido de un espacio afín a otro que es polinomial coordenada a coordenada. De manera análoga uno obtiene que la restricción a $\mathbb{P}^1 \setminus \{(1:0)\}$ funciona y para finalizar hacemos la otra restricción

$$\begin{aligned} v_{1,2} \colon \mathbb{P}^1 \setminus \{(0:1),(1:0)\} &\longrightarrow \mathbb{P}^2 \\ (x:y) &\longmapsto \left(\frac{x}{y} : 1 : \frac{y}{x}\right) \end{aligned}$$

que nuevamente es regular pues son funciones racionales coordenada a coordenada y todo sale bien! Al haberlo chequeado localmente, tenemos que es un morfismo a su imagen. Es más resulta ser un isomorfismo, pero no quiero pararme mucho tiempo aquí.

Veamos ahora un ejemplo de un Veronese con $n \neq 1$ e ilustraremos otra propieadad que nos habla de cómo funciona la geometría de este mapa.

Ejemplo (La superficie de Veronese)**.** Estudiemos el mapa $v_{2,2}$.

$$\begin{aligned} v_{2,2} \colon \mathbb{P}^2 &\longrightarrow \mathbb{P}^5 \\ (x_0, x_1, x_2) &\longmapsto (x_0^2 : x_1^2 : x_2^2 : x_1x_2 : x_0x_1 : x_0x_2) \end{aligned}$$

Usaremos este ejemplo para ver que el mapa de Veronese $v_{n,m}$ toma hipersuperficies de grado m en $\mathbb{P}^n$ y los manda a la intersección de un hiperplano en $\mathbb{P}^N$ con la imagen del Veronese.

Sean $z_0, z_1, \ldots, z_5$ las coordenadas de $\mathbb{P}^5$. En este caso debemos estudiar hipersuperficies de grado 2. Consideremos

$$f = x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 = 0$$

Consideremos el hiperplano $H = Z(z_0 + z_1 + z_2)$. Tenemos que la intersección de H con la imagen del Veronese nos da lo siguiente:

$$z_0 = x_0^2$$

$$z_1 = x_1^2$$

$$z_2 = x_2^2$$

Pues esas son las coordenadas en la imagen. Luego tenemos que $v_{2,2}(Z(x_0^2+x_1^2+x_2^2)) = H \cap v_{2,2}(\mathbb{P}^2)$.

3. Incrustación de Segre

Nos gustaría que el producto de variedades sea una variedad, pero las cosas son complicadas.

Ejemplo (La topología producto no es lo mismo que la Zariski)**.** Consideremos $\mathbb{A}^1, \mathbb{A}^2$ con la topología Zariski y $\mathbb{A}^1 \times \mathbb{A}^1$ con la topología producto. Entonces aseguramos que la topología producto no es la misma que la Zariski. Argumento típico:

Los cerrados en $\mathbb{A}^1$ son puntos y por lo tanto los cerrados en $\mathbb{A}^1 \times \mathbb{A}^1$ son finitas lineas verticales y horizontales, pero hay cerrados Zariski en $\mathbb{A}^2$ que no son de esa forma, por ejemplo $Z(x-y)$.

Nota. Para cerrados afines, es sencillo definir un producto entre ellos. Se puede encontrar en página 25 de [Sha13] ejemplo 1,5.

Esto nos confirma que ver que el producto de variedades es algo más complicado que aprovecharse de la topología del espacio.

Nota. Sean X, Y dos variedades, entonces $X \subset \mathbb{P}^r$ e $Y \subset \mathbb{P}^s$. Su producto $X \times Y$ vive dentro de $\mathbb{P}^r \times \mathbb{P}^s$. Si logramos definir el producto entre $\mathbb{P}^r \times \mathbb{P}^s$ de manera que es una variedad y el conjunto $X \times Y$ es cerrado dentro, obtendremos que es a la vez variedad. (Voy a explicar más en la charla, pero esa es la idea fundamental).

Lo que haremos es definir un mapa que dote al producto de variedades la estructura de variedad. El mapa es el siguiente:

$$\begin{aligned} \varphi\colon \mathbb{P}^r \times \mathbb{P}^s &\longrightarrow \mathbb{P}^N \\ (x_0 : \ldots : x_r), (y_0 : \ldots : y_s) &\longmapsto (x_0 y_0 : x_0 y_1 : \ldots : x_1 y_0 : \ldots : x_r y_s) \end{aligned}$$

donde $N = (r+1)(s+1) - 1 = rs + r + s$ y las coordenadas de la imagen están en orden lexicográfico. Ahora hagamos una receta de porque definimos este mapa con este dominio.

Ejemplo. Hagamos un ejemplo explicito y veamos estas propiedades acá. Consideremos $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$. Entonces el mapa de Segre es el siguiente

$$\begin{aligned} \varphi\colon \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 &\longrightarrow \mathbb{P}^3 \\ (x : y), (z : w) &\longmapsto (xz : xw : yz : yw) \end{aligned}$$

Notemos lo siguiente:

$$xz \cdot yw = xw \cdot yz$$

Entonces, si las coordenadas de $\mathbb{P}^3$ son x_0, x_1, x_2, x_3 entonces

$$\varphi(\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1) \subset Z(x_0 x_3 - x_1 x_2)$$

y es más, se tiene que se consigue una igualdad. En efecto, asumamos que $(x_0 : y_0 : z_0 : w_0) \in Z(x_0 x_3 - x_1 x_2)$. Sin perdida de generalidad tomemos $x_0 \neq 0$. Entonces tomemos los puntos $(x_0 : z_0)$ y $(x_0 : y_0)$. Entonces su imagen bajo el Segre es

$$(x_0 x_0 : x_0 y_0 : z_0 x_0 : z_0 y_0) = (x_0 x_0 : x_0 y_0 : z_0 x_0 : x_0 w_0) = (x_0 : y_0 : z_0 : w_0)$$

por lo tanto $Z(x_0 x_3 - x_1 x_2)$ y se tiene que la imagen es una cuádrica.

En esta superficie, existen dos familias de rectas, a estas les llamaremos los rulings de esta cuádrica. Estas están dadas por la imagen de los siguientes conjuntos

$$\{(a_0 : b_0)\} \times \mathbb{P}^1 \qquad\qquad \mathbb{P}^1 \times \{(c_0 : d_0)\}$$

Para ver que estas son todas las rectas en la cuádrica tenemos que entender qué es una recta y cuándo una recta vive en la cuádrica. Una recta en $\mathbb{P}^3$ es la intersección de dos hiperplanos (por ejemplo $x_0 = x_1 = 0$).

Sea $ax_0 + bx_1 + cx_2 + dx_3 = 0$ un hiperplano en $\mathbb{P}^3$. Por la charla anterior, tenemos que la intersección de este hiperplano con nuestra cuádrica es una curva de grado 2. Ahora, si esta curva fuese irreducible, cooperamos. Si no lo fuese, entonces son dos rectas! La pregunta ahora es en qué casos se tiene lo segundo y es el siguiente

Proposición. *La intersección entre* $ax_0 + bx_1 + cx_2 + dx_3 = 0$ *y* $x_0x_3 - x_1x_2 = 0$ *es un par de lineas si y solo si* $ad = bc$.

Entonces, así describimos completamente las dos familias de rectas que viven en $Z(x_0x_3 - x_1x_2)$.

Referencias

[Har77] Robin Hartshorne, *Algebraic geometry*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 52, Springer New York, New York, NY, 1977.

[Sha13] I. R. Shafarevich, *Basic algebraic geometry 1: varieties in projective space*, 3rd edition ed., Springer, New York, 2013.