GÉNERO Y FORMAS DIFERENCIALES

NICOLÁS VILCHES

Índice

1. El problema de clasificación

Una de las grandes preguntas motivaciones en geometría algebraica es el llamado *problema de clasificación* (ver por ejemplo [Har77, §I.8]). En su forma más simple, el objetivo es poder clasificar todas las variedades algebraicas salvo isomorfismo. Veamos un ejemplo artificial pero iluminador.

Ejemplo 1. Supongamos que queremos clasificar figuras geométricas, como polígonos o poliedros. Por supuesto, esta pregunta suena bastante amplia en esta forma, así que vamos a comenzar reduciendo el problema. Fijemos arbitrariamente la dimensión en 2, y la cantidad de lados en 3. De este modo, buscamos estudiar los triángulos salvo isomorfismo.

Con esto en mente, el siguiente paso es pensar si hay una manera abstracta de escribir un triángulo, que conserve "todas" sus propiedades. Una manera es pensar los triángulos como tres pares de puntos en el plano, de modo que tenemos una inclusión

$$\{\text{triángulos en el plano}\} \to \mathbb{R}^6,$$

mandando cada triángulo en el plano a sus tres vértices. No obstante, en este caso podemos hacer algo más sofisticado: usando los criterios de congruencia, dos triángulos son congruentes si y solo si sus lados correspondientes tienen igual medida. De este modo, a cada triángulo podemos asociarle una terna (a, b, c) de valores positivos, tales que $a \geq b \geq c$, y de modo que dos triángulos son isomorfos si y solo si sus ternas coinciden. En otras palabras, la asignación

$$\{\text{triángulos en el plano}\} \to \mathbb{R}^3_{>0}$$

induce una *inyección*

$$\{\text{clases de congruencia de triángulos}\} \hookrightarrow \mathbb{R}^3_{>0}.$$

Por último, el sueño fila es ser capaz de describir exactamente qué ternas (a, b, c) corresponden a un triángulo. Uno demuestra que esto es posible si y solo si (a, b, c)

satisfacen la *desigualdad triangular*, y así obtenemos una *biyección*

$$\{\text{clases de congruencia de triángulos}\} \leftrightarrow \{(a,b,c) : a \geq b \geq c > 0, b + c > a\}.$$

Este ejemplo es un poco artificial, pero al menos ilustra varias de las ideas claves para abordar un problema de clasificación. En primer lugar, uno debería fijar algún tipo de información "discreta" de los objetos geométricos a estudiar, como la dimensión o la "cantidad de lados". Luego, uno debería buscar alguna cantidad de *parámetros* (o *moduli*, siguiendo a Riemann), que codifiquen toda la geometría de los objetos en cuestión. Por último, entender cuáles valores de estos parámetros corresponden a un objeto geométrico de verdad.

Con estas motivaciones en mente, nuestro objetivo para el resto de la charla es abordar la primera etapa para el problema de clasificación de curvas algebraicas. Uno podría pensar que esto es algo modesto para una charla, pero de hecho es todo lo contrario. Las ideas del primer paso ya eran conocidas por Riemann y Brill–Noether a fines del siglo XIX; en cambio, el resto del programa no fue hecho (de forma algebraica) hasta el trabajo de Deligne–Mumford a fines de la década de los 60.

2. Formas diferenciales en variedades afines

Hay bastantes maneras de dirigir nuestro estudio de invariantes para curvas. En nuestro caso, introduciremos la noción de una *1-forma diferencial*, que nos servirá adicionalmente como excusa para introducir herramientas técnicas interesantes. Nuestra discusión seguirá [Sha13, Chapter 5].

Definición 2 ([Sha13, Prop 5.3.1], cf. [Sha13, p. 190])**.** Sea X una variedad afín, y sea A su anillo de coordenadas. El *módulo de 1-formas diferenciales* es el A-módulo generado por los símbolos $\{df\}_{f\in A}$, sujeto a las relaciones

1. $d(f+g) = df + dg$,
2. $d(fg) = f\,dg + g\,df$,
3. $da = 0$ si $a \in \mathbb{C}$.

Antes de sentarnos a entender este módulo en completa generalidad, es bueno hacer un ejemplo concreto.

Ejemplo 3. Consideremos la curva $C = V(y^2 - x^3 - 1)$ en $\mathbb{A}^2$, de modo que el anillo de coordenadas es $\mathbb{C}[x,y]/(y^2 - x^3 - 1)$. Un 1-diferencial es por ejemplo

$$\omega = 2y\,d(x^2 - 2y) + x\,d(x+y).$$

Eso sí, hay varias simplificaciones que podemos hacer. En primer lugar, tenemos que $d(x+y) = dx + dy$. En segundo lugar,

$$d(x^2 - 2y) = d(x^2) - d(2y).$$

Acá $d(x^2) = x\,dx + x\,dx = 2x\,dx$ gracias a la segunda regla. Del mismo modo,

$$d(2y) = 2\,dy + y\,d(2) = 2\,dy.$$

Juntando todo, obtenemos

$$\omega = 2y(2x\,dx - 2\,dy) + x(dx + dy) = (4xy + x)\,dx + (x - 4y)\,dy.$$

Uno podría preguntarse si dx y dy son independientes; de hecho, no lo son. Podemos hacer el truco

$$0 = d(y^2 - x^3 - 1) = 2y\,dy - 3x^2\,dx,$$

lo que da una relación algebraica entre estos elementos.

Siguiendo esas ideas, no es difícil convencerse del siguiente resultado.

Lema 4. *Sea X una variedad afín cuyo anillo de coordenadas es de la forma $A = \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]/(f_1, \ldots, f_s)$. Luego, el módulo de 1-formas diferenciales viene descrito por la receta*

$$\Omega_X = \frac{A\,dx_1 \oplus A\,dx_2 \oplus \cdots \oplus A\,dx_n}{\langle df_1, \ldots, df_s \rangle}.$$

Ejemplo 5. Consideremos nuevamente la curva $C = V(y^2 - x^3 - 1)$ en $\mathbb{A}^2$. Usando el lema, obtenemos el módulo

$$\Omega_C = \frac{A\,dx \oplus A dy}{\langle 2y\,dy - 3x^2\,dx \rangle}.$$

Pareciera que Ω_C no es un módulo libre: ni el $3x^2$ ni el $2y$ son “suficientemente libres” como para poder invertirlos. Eso sí, uno puede hacer un truco: podemos “formalmente invertir” el $3x^2$.

En otras palabras, si miramos en $D(3x^2) \subset \mathbb{A}^2$, ahora sí el $3x^2$ es invertible. Esta es una variedad algebraica: podemos escribirla como $k[x, y, t]/(3x^2 t - 1)$, donde t debería pensarse como “el inverso de $3x^2$”. Acá, la curva C corta en

$$C_1 = V(y^2 - x^3 - 1, 3x^2 t - 1) \subset \mathbb{A}^3.$$

¿Cómo se ve el módulo de diferenciales acá? Tenemos

$$\Omega_{C_1} = \frac{A\,dx \oplus A\,dy \oplus A\,dt}{\langle 2y\,dy - 3x^2\,dx, 6xt\,dx + 3x^2\,dt \rangle}.$$

Pero en A los elementos t y $3x^2$ son invertibles. Con ello, las ecuaciones pueden escribirse simplemente como

$$2yt\,dy - dx, \quad 6xt^2\,dx - dt.$$

Resulta así que $\Omega_{C_1} \cong A\,dy$.

El mismo truco puede hacerse con $D(2y)$, lo que da otro abierto de la curva C. Es importante destacar que acá $D(2y) \cup D(3x^2)$ cubre a C, pues el complemento (el punto $(0, 0)$) no está en C.

Este truco es de especial utilidad para hacer cálculos, y puede hacerse de a varias variables a la vez. Por ahora, lo enunciaremos solamente para variedades dadas por una única ecuación, lo que será suficiente para nuestros propósitos.

Definición 6. Sea $X \subset \mathbb{A}^n$ una variedad de dimensión $n - 1$, dada por una única ecuación $I(X) = (f)$. Decimos que X es *suave* si

$$V(f, \partial f/\partial x_1, \ldots, \partial f/\partial x_n) = \varnothing.$$

Antes de continuar, necesitaremos una última noción, donde veremos cómo trabajar con formas diferenciales a partir de morfismos de variedades.

Definición 7. Sea $\phi\colon X \to Y$ un morfismo de variedades afines, y sea $\phi^\sharp\colon k[Y] \to k[X]$ el morfismo de anillos coordenados asociado. Definimos el *pullback* $\phi^*\colon \Omega_Y \to \Omega_X$ como el morfismo de $k[Y]$-módulos dado por

$$\phi^*(df) = d(\phi^\sharp f),$$

y extendiendo por linealidad.

3. Formas diferenciales en variedades proyectivas

En el caso proyectivo definir una forma diferencial es un poco más delicado. Haremos una definición concreta, aunque no ideal.

Definición 8. Sea $X \subset \mathbb{P}^n$ una variedad proyectiva. Una *forma diferencial* ω en X es una colección de formas diferenciales $\omega_0, \ldots, \omega_n$ en $D^+(X_0) \cap X, \ldots, D^+(X_n) \cap X$ que sean compatibles en las intersecciones. Esto es, para todo $0 \leq i, j \leq n$, los pullbacks de ω_i, ω_j a $D^+(x_i) \cap D^+(X_j) \cap X$ coinciden.

Como dijimos arriba, esta definición tiene bastantes problemas. Por ejemplo, no es claro qué pasa si X está incrustada de manera distinta en $\mathbb{P}^n$. Adicionalmente, no es claro cómo generalizar bien esta definición. Todos estos problemas técnicos se evitan definiendo con cuidado el *haz de diferenciales*, cosa que no haremos hoy.

Ejemplo 9 ([Sha13, 5.3.14])**.** Intentemos buscar formas diferenciales en $\mathbb{P}^1$. Para ello, necesitamos una forma diferencial en $\mathbb{A}^1_x$ y una forma diferencial en $\mathbb{A}^1_y$, tales que coincidan en la intersección.

Para ello, tenemos que ver cuándo $f(x)\,dx$ (una forma diferencial en $\mathbb{A}^1_x$) y $g(y)\,dy$ (una forma diferencial en $\mathbb{A}^1_y$) pueden coincidir en la intersección. Acá $y = 1/x$, de donde

$$g(y)\,dy = g(1/x)d(1/x) = \frac{g(1/x)}{-x^2}\,dx.$$

Buscamos así ver si $f(x)$ puede escribirse como $-g(1/x)/x^2$, lo que claramente no es posible. De este modo, $\mathbb{P}^1$ no admite diferenciales (distintos de cero).

Ejemplo 10 ([Sha13, 5.3.15])**.** Intentemos calcular formas diferenciales en la curva de Fermat $C = \{X_0^4 + X_1^4 + X_2^4\}$. Para ello, en vez de trabajar en las tres cartas U_0, U_1 y U_2, trabajaremos en las tres cartas U_{01}, U_{12} y U_{02}. Acá es importante notar que ninguno de los puntos $[0, 0, 1]$ y similares están sobre la curva.

Denotemos por $u = X_1/X_0$ y $v = X_2/X_0$. De este modo, tenemos que

$$k[U_{01}] = \mathbb{C}[u, v, 1/u], \quad k[U_{12}] = \mathbb{C}[1/u, u/v, v/u], \quad k[U_{02}] = \mathbb{C}[u, v, 1/v].$$

Con esto en mente, calculemos cómo se ven los diferenciales de la curva C en cada carta. Para $C_{01} = C \cap U_{01}$, obtenemos

$$\Omega_{C_{01}} = \frac{A_{01}\,du \oplus A_{01}\,dv \oplus A_{01}\,d(1/u)}{\langle 4u^3\,du + 4v^3\,dv\rangle} = A_{01}\,dv.$$

Similarmente, $\Omega_{C_{02}} = A_{02}\,du$.

De este modo, un diferencial $\omega_{01} = f(u, v, 1/u)\,du$ restringe a

$$f(u, v, 1/u)\,dv = -f(u, v, 1/u)\frac{u^3}{v^3}\,du.$$

Para que esto sea la restricción de un diferencial en U_{02}, necesitamos que no haya denominadores con u; esto es, $1/u$ debe aparecer a lo más con grado 3.

Nos falta verificar la carta C_{12}. Como antes,

$$\Omega_{C_{12}} = \frac{A_{12}\,d(1/u) \oplus A_{12}\,d(u/v) \oplus A_{12}\,d(v/u)}{(4(1/u)^3\,d(1/u) + 4(v/u)^3\,d(v/u))} = A_{12}\,d(1/u) = A_{12}\frac{du}{u^2}.$$

Así, queremos que $f(u, v, 1/u) = \frac{1}{u^2}g(1/u, v/u, u/v)$. El lado derecho no tiene denominadores con v, por lo que no podemos utilizar u/v en el lado derecho. Así, no podemos usar u en el lado izquierdo, y buscamos

$$f(v, 1/u) = \frac{1}{u^2} g(1/u, v/u).$$

Mirando con cuidado, resulta que f debe ser una suma de monomios v^i/u^j con $i \leq j + 2$.

Pongamos todo junto. Si recordamos, habíamos dicho que $1/u$ aparece a lo más con grado 3. De este modo, los monomios que pueden aparecer son $1/u^2$, v/u^3, $1/u^3$. Con ello, el espacio vectorial de formas diferenciales en C tiene dimensión 3.

Con esto en mente, introducimos la siguiente definición.

Definición 11. Sea X una variedad proyectiva. La dimensión del espacio vectorial de formas diferenciales en X es el *género geométrico* de X, denotado $p_g(X)$.

Ejemplo 12. Calculamos antes que $\mathbb{P}^1$ no tiene formas diferenciales, por lo que $p_g(\mathbb{P}^1) = 0$. De hecho, esencialmente el mismo cálculo muestra que $p_g(\mathbb{P}^d) = 0$.

Del mismo modo, arriba mostramos que la curva de Fermat C tiene género geométrico 3. El mismo argumento muestra que para $d \geq 3$, la curva de Fermat $\{X_0^d + X_1^d + X_2^d\}$ tiene género geométrico $(d-1)(d-2)/2$. De hecho, esta fórmula calcula el género geométrico de cualquier curva suave en $\mathbb{P}^2$.

Es interesante observar varias cosas respecto al género geométrico. En primer lugar, tenemos que $p_g \geq 0$ directamente de la definición. De nuestra definición, resulta que el género geométrico es invariante bajo isomorfismos (una vez que uno verifica con cuidado que p_g no depende de la incrustación proyectiva). De hecho, es invariante bajo morfismos birracionales, cf. [Har77, II.8.19].

Por último, calcular el género geométrico a partir de esta definición es un cálculo enredado a veces. Cerraremos la sesión de hoy discutiendo una herramienta distinta para calcular géneros.

4. Fórmula de Riemann–Hurwitz

Antes hemos mencionado rápidamente la definición de una curva suave. Supongamos que $C = V(f)$ es una curva suave en $\mathbb{A}^2$, pasando por $(0, 0)$. Nuestra suposición implica que $f_x(0, 0)$ o $f_y(0, 0)$ es distinto de cero. En el primer caso, resulta que $\Omega_{C \cap D(f_x)} = A\, dy$, donde A es el anillo de coordenadas de $C \cap D(f_x)$. Llamamos a y un *parámetro local* en p.

Usando un parámetro local, podemos definir un índice de anulación para una forma diferencial ω. Si $\omega = \phi(x, y)dy$ alrededor de p, el *índice de anulación* es la potencia a la que y aparece en $\phi(0, y)$. Más generalmente, si $p = (a, b)$ satisface $f_x(a, b) \neq 0$, calculamos la potencia de $(y - b)$ en $\phi(a, y)$.

Es importante destacar que siempre existen parámetros locales para curvas suaves, incluso si no es una curva plana.

Ejemplo 13. Veamos la curva $X_0^4 + X_1^4 + X_2^4$ en $\mathbb{P}^2$, y consideremos la forma diferencial definida por la fórmula $\frac{1}{u^2}\, dv$.

Para calcular, veamos primero la carta afín U_0, con $u = X_1/X_0$ y $v = X_2/X_0$. Acá si $p = (a, b)$ es un punto con $a \neq 0$, entonces p no se anula en la u-derivada de $u^4 + v^4 + 1$. Nuestra forma diferencial se ve como $\frac{1}{u^2}\, dv$ acá. Usando la receta anterior, podemos calcular que ω tiene índice de anulación cero en todos estos puntos.

¿Qué pasa con el resto? Primero, falta ver qué pasa si $b = 0$, para lo que tenemos que calcular con la otra coordenada. Usando

$$\omega = -\frac{u}{v^3}\, du,$$

resulta que cada uno de los cuatro puntos $(0, (-1)^{1/4})$ tiene índice de anulación igual a 1. Los otros puntos (fuera de la carta afín U_0) tienen índice de ramificación igual a cero.

Teorema 14. *Si $\omega \neq 0$ es una forma diferencial en una curva C, entonces hay finitos puntos $p_1, \dots, p_k$ donde ω tiene índice de anulación distinto de cero. Si $e_1, \dots, e_k$ es dicho índice de anulación, entonces*

$$p_1e_1 + p_2e_2 + \cdots + p_ke_k = 2p_g - 2.$$

Este es un resultado profundo, y omitiremos su demostración. Por ahora, veamos qué podemos hacer si tenemos dos curvas X, Y junto a un morfismo $f\colon X \to Y$. Si ω_Y es una forma diferencial en Y, el pullback $f^*\omega_X$ es una forma diferencial en X. Ahora bien, los puntos de anulación de $f^*\omega_X$ se relacionan con los de ω_Y, dependiendo de la *ramificación* de f y el *grado* de f. La ramificación de f mide en qué puntos f tiene derivada distinta de cero (lo que aumenta el índice de anulación de $f^*\omega_Y$), mientras que el grado cuenta la cantidad de puntos en X que son enviados a un punto de Y. Resulta así la siguiente fórmula.

Teorema 15 (Riemann–Hurwitz)**.** *Sea $f\colon X \to Y$ un morfismo no constante entre curvas suaves, proyectivas. Luego, tenemos*

$$2p_g(Y) - 2 = \deg(f)(2p_g(X) - 2) + \sum_x (e_x - 1),$$

donde e_x es el índice de ramificación de f en x.

Desde el punto de vista analítico, esta fórmula tiene muchísimo sentido. Resulta que $2 - 2p_g$ coincide con la *característica de Euler (topológica)* de la superficie de Riemann asociada. De este modo, si $f\colon X \to Y$, podemos intentar calcular el género de X a partir de una triangulación de Y, y usando f.

Referencias

[Har77] Robin Hartshorne, *Algebraic geometry*, Graduate Texts in Mathematics, vol. No. 52, Springer-Verlag, New York-Heidelberg, 1977. MR0463157

[Sha13] Igor R. Shafarevich, *Basic algebraic geometry. 1*, 3rd ed., Springer, Heidelberg, 2013. Varieties in projective space. MR3100243

Department of Mathematics, Columbia University, 2990 Broadway, New York, NY 10027, USA

Email address: nivilches@math.columbia.edu