- La vez pasada vimos otras dependiendo de su cuerpo de definición.

$\mathbb{R}$: $t_2 \geq 3 + \sum_{m\geq 3}(m-3)t_m$ $\qquad$ $\mathbb{C}$: $2t_2 + t_3 \geq 3 + d + \sum_{m \geq 4}(m-4)t_m$

Preg/. Hay alguna forma de ver esto uniformemente?

Resp: Sí.

§1. Números de Chern.

- Para una variedad nosing proyectiva X tenemos Ω^1_X y su dual T_X^1.
- $c_i(T_X)$ son las clases de Chern de X, y los números son intersecciones entre ellos.
- dim $= 1$: $c_1(T_X) = -K_X = \chi_{top}(X) = 2 - 2g$, i.e., esencialmente $g(X) =$ género.
- dim $= 2$: $c_1(T_X) = -K_X \Rightarrow K_X^2 = c_1^2(X)$
$c_2(T_X) = \chi_{top} = c_2(X)$

$\therefore$ Para superficies 2 enteros.

Ej/. $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$; $K_X^2 = 9$ $\chi_{top} = 3$.

- Si $D \subset X$ = sup nosing, D = SNC
$\Rightarrow \Omega^1(\log D) \rightsquigarrow \bar{c}_i(X,D)$
$\therefore \bar{c}_1^2, \bar{c}_2$

- Si $\{L_1, \ldots, L_d\} \subset \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}} \Rightarrow X = Bl_{\substack{m\text{-pts} \\ m \geq 3}}(\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}) \to \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$

BoBy^2: ~~Configuraciones~~ Arreglos de rectas en $\mathbb{P}^2_k$.

- Recuerdo: $\{L_1, \ldots, L_d\} = A$; reales, complejos, m-puntos, t_m, ejemplos.

Ej/. Porqué plano de Fano no es posible en char $\neq 2$? rectas/puntos en $\mathbb{P}^2_{\mathbb{F}_q}$ $q^2+q+1 = t_{q+1}$

- Recordar $\binom{d}{2} = \sum_{m\geq 2}\binom{m}{2}t_m$. Hay otra restricción combinatorial?
Preg abierta: conf puntos triples.

Thm: (De Bruijn-Erdös 1942; Fig. Et. U) Sea $t_d = 0$.
Tenemos $\sum_{m\geq 2} t_m \geq d$ e igualdad $\Leftrightarrow$ casi trivial o la conf. $\mathbb{P}^2_{\mathbb{F}_q}$, $q = p^n$, $\forall p, n$.

Dem/. Solo la desigualdad.
Pensar $L_i \in \mathbb{Q}^{\sum_{m\geq 2} t_m}$.
Para $L_i = (\ldots, 1$ o $0, \ldots)$ si $P_j \in L_i$ o no.
P.d. $L_1, \ldots, L_d$ son l.i.
Sino reordenando: $L_1 = \sum_{i=2}^{d} q_i L_i$
Tenemos $L_i \cdot L_i \geq 2$ y $L_i \cdot L_j = 1$. $\therefore$ $\sum_{i=2}^{d} q_i = L_1^2$ (1)
y $1 = q_2 L_2^2 + \sum_{i\geq 3} q_i$ (2)

$\overset{(1)+(2)}{\Rightarrow}$ $L_1^2 - 1 = -q_j L_j^2 + q_j$ $\quad q_j = \dfrac{L_1^2 - 1}{1 - L_j^2} < 0$ $\forall j$ $\rightarrow\leftarrow$.

Dem: $\bar{c}_1^2 \leq \frac{5}{2}\bar{c}_2 \iff t_2 \geq 3 + \sum_{m\geq 4}(m-3)t_m$

Dado A conf real de d rectas, tenemos pavimentación por polígonos.

$$f_0 = \#\text{puntos} = \sum_{m\geq 2} t_m$$

$$f_1 = \#\text{segmentos} = \frac{1}{2}\sum_{m\geq 2} 2m t_m = \frac{1}{2}\sum_{m\geq 3} m p_m$$

$$f_2 = \sum_{m\geq 3} p_m$$

Sabemos $e(\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}) = 1$ y así

$$f_0 - f_1 + f_2 = 1$$

$$\Rightarrow f_0 - \alpha f_1 - (1-\alpha) f_1 + f_2 = 1$$

$$\Rightarrow \sum_{m\geq 2} t_m - \alpha \sum_{m\geq 2} m t_m - \frac{(1-\alpha)}{2}\sum_{m\geq 3} m p_m + \sum_{m\geq 3} p_m = 1$$

$$\Rightarrow -1 - \sum_{m\geq 2}(\alpha m - 1)t_m = \sum_{m\geq 3}\underbrace{\left(\left(\frac{1-\alpha}{2}\right)m - 1\right)}_{\geq 0} p_m$$

$\Rightarrow$ desigualdad

$\therefore\ 1 - \frac{2}{m} \geq \alpha$ y $\alpha = \frac{1}{3}$ es óptimo.

Recordar que!

Sobre $\mathbb{C}$: $t_d = t_{d-1} = 0$

$$\Rightarrow 2t_2 + t_3 \geq 3 + d + \sum_{m\geq 4}(m-4)t_m.$$

UNIVERSIDAD DE TARAPACÁ
Universidad del Estado

CONGRESO MATEMÁTICA CAPRICORNIO
COMCA 2024
31-07 al 02-08

$\therefore\ D = L_1 + \dots + L_d + E_1 + \dots + E_s.$

Lema: $\bar{c}_1^2 = 9 - 5d + \sum_{m\geq 2}(3m-4)t_m$

$\bar{c}_2 = 3 - 2d + \sum_{m\geq 2}(m-1)t_m.$

Proof: $\bar{c}_1^2 = (K_X + D)^2$ & $\bar{c}_2 = \chi_{top}(X) - \chi_{top}(D)$.

Lema: Si A no es trivial o casi trivial

$$\Rightarrow \bar{c}_1^2 > 0,\ \bar{c}_2 > 0,\ 2 - \frac{2}{d-2} \leq \frac{\bar{c}_1^2}{\bar{c}_2} \leq 3.$$

Tenemos "=" $\iff$ ~~solo nodos~~

"=" $\iff \mathbb{P}^2_{\mathbb{F}_q}$. * $\left(\sum_{m\geq 1} t_m \geq d\right)$

Teorema: A real $\Rightarrow \bar{c}_1^2 \leq 2.5\,\bar{c}_2$ & $=$ $\iff$ simplicial.

Proof: Miro $A \subset \mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$ y pavimento. Luego cuento polígonos, lados y puntos. Luego $\chi_{top}(\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}) = 3 - 6 + 4 = 1$, y recalculo ∎

* **Teorema:** A complejo $\Rightarrow \bar{c}_1^2 \leq 2.\bar{6}\,\bar{c}_2$ con $=$ $\iff$ dual Hesse.

Preg*: Existirá dem topológica de *? sense

Picture $\bar{c}_1^2/\bar{c}_2$:

Discreto

1 — 2 — 2.5 — 2.6̄ — 3

$\mathbb{Q}$? dense $\mathbb{R}$

Preg 2: Discreto?