GEOMETRÍA DEL GRUPO DE UNA CÚBICA PLANA

FELIPE INOSTROZA

Índice

1. Grupo de una cúbica

Teorema 1.1 (Bézout)**.** *Sean F, G curvas no-singulares de grado m, n respectivamente con componentes distintos, entonces*

$$\#F \cap G \leq mn$$

Si consideramos una cúbica C y una linea L, entonces $\#L \cap C \leq 3$.

Definición 1. Sea C una cúbica, y L una recta.

- Si $L \cap C = \{P, Q, R\}$, entonces definimos $\varphi(P, Q) = R$.
- Si $L \cap C = \{P, Q\}$ y L es tangente a C en P, entonces definimos $\varphi(P, P) = Q$.
- Si $L \cap C = \{P\}$ con L tangente, definimos $\varphi(P, P) = P$.

Proposición 1.2. *Toda cúbica planar no-singular definida sobre un cuerpo algebraicamente cerrado tiene 9 puntos de inflexión. Para estos puntos se tiene que $\varphi(P, P) = P$.*

Definición 2. Dada una cúbica C, fijamos un punto 0 tal que $\varphi(0, 0) = 0$. Definimos la operación $+ \colon E \times E \to E$ de la forma

$$P + Q = \varphi(0, \varphi(P, Q))$$

Proposición 1.3. *Si $R = \varphi(P, Q)$, entonces $P + Q + R = 0$.*

Demostración.

$$\begin{aligned} P + Q &= \varphi(0, \varphi(P, Q)) \\ &= \varphi(0, R) \\ \implies P + Q + R &= R + \varphi(0, R) \\ &= \varphi(0, \varphi(R, \varphi(0, R))) \\ &= \varphi(0, 0) = 0 \end{aligned}$$

□

Teorema 1.4. $(C, +, 0)$ *es un grupo abeliano.*

Teorema 1.5. *Si E es una curva elíptica, entonces $E \cong \mathbb{C}/\Lambda$, con Λ un reticulado.*

Date: 12 de septiembre de 2024.

Proposición 1.6. *Si P, Q son puntos de 3-torsión, entonces $\varphi(P,Q)$ también lo es. Además, si $P \neq Q$, entonces $P \neq \varphi(P,Q) \neq Q$.*

Demostración. $P + Q + \varphi(P,Q) = 0 \implies 3P + 3Q + 3\varphi(P,Q) = 0 \implies 3\varphi(P,Q) = 0$. Luego si $\varphi(P,Q) = P$, entonces $P = Q$, ya que P es 3-torsión. □

2. Configuración de Hesse

Proposición 2.1. *Dada una cúbica $C \subseteq \mathbb{P}^2$ dada por $F = 0$, existen 9 puntos de inflexión, dados por $C \cap H$, con H la curva dada por el determinante del Hessiano de F igual a 0.*

Definición 3. El pencil de Hesse es el sistema de cúbicas planas dado por

$$E_{\lambda,\mu} \colon \lambda(x^3 + y^3 + z^3) + \mu xyz = 0, \quad [\lambda, \mu] \in \mathbb{P}^1$$

Observación. Si $E_{\lambda,\mu} = \{F = 0\}$, entonces $\exists [\lambda', \mu'] \in \mathbb{P}^1$ tal que $E_{\lambda',\mu'} = \{\det(H(F)) = 0\}$.

Demostración. Sea $F(x,y,z) = \lambda(x^3 + y^3 + z^3) + \mu xyz$, entonces su Hessiano es:

$$H(F) = \begin{pmatrix} 6\lambda x & \mu z & \mu y \\ \mu z & 6\lambda y & \mu x \\ \mu y & \mu x & 6\lambda z \end{pmatrix}$$

$$\implies \det(H(F)) = -6\lambda\mu^2(x^3 + y^3 + z^3) + (216\lambda^2 + 2\mu^3)xyz$$

el cual es un polinomio que define la curva $E_{\lambda',\mu'}$, con $\lambda' = -6\lambda\mu^2, \quad \mu' = 216\lambda^2 + 2\mu^3$. □

Ahora quisiéramos saber como se ven los puntos de inflexión de una curva $E_{\lambda,\mu}$. Para esto, podemos ver si existen puntos que anulen a todos los polinomios de la forma

$$\lambda(x^3 + y^3 + z^3) + \mu xyz$$

Para esto, queremos que los puntos no dependan de λ, μ, por lo que podemos buscar puntos $[x_0, y_0, z_0]$ tales que $x_0^3 + y_0^3 + z_0^3 = x_0 y_0 z_0 = 0$. Primero notemos que si $x_0 = 0$, entonces $x_0 y_0 z_0 = 0$. Luego queremos y_0, z_0 tales que $y_0^3 + z_0^3 = 0$. Si $y_0 \neq 0$, podemos asumir $y_0 = 1$ ya que $[x_0, y_0, z_0] \in \mathbb{P}^2$. Entonces $-z_0^3 = 1$, por lo que podemos considerar $z_0 = -\zeta$, donde $\zeta^3 = 1$. Luego $[0, 1, -\zeta] \in E_{\lambda,\mu}$ para todo $[\lambda, \mu] \in \mathbb{P}^1$.

Notemos que todos los puntos tales que sus entradas son permutaciones de $0, 1, -\zeta$ pertenecen a todo $E_{\lambda,\mu}$:

$$[0, 1, -\zeta], \quad [0, -\zeta, 1], \quad [1, 0, -\zeta],$$

$$[1, -\zeta, 0], \quad [-\zeta, 0, 1], \quad [-\zeta, 1, 0]$$

También podemos usar $-\zeta^2$ y -1 en vez de $-\zeta$, por lo que tenemos en total 18 posibles puntos, pero eliminando los repetidos nos quedan 9 puntos distintos:

$$p_0 = [0, 1, -1], \quad p_1 = [0, 1, -\zeta], \quad p_2 = [0, 1, -\zeta^2]$$
$$p_3 = [1, 0, -1], \quad p_4 = [1, 0, -\zeta^2], \quad p_5 = [1, 0, -\zeta]$$
$$p_6 = [1, -1, 0], \quad p_7 = [1, -\zeta, 0], \quad p_8 = [1, -\zeta^2, 0]$$

Todos estos puntos pertenecen a todas las curvas del pencil de Hesse, y entonces son puntos de inflexión.

Consideremos $E[3] = \{p_0, \dots, p_8\}$, entonces $(E[3], +, p_0)$ es un grupo abeliano isomorfo a $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$, dado por el isomorfismo

$$\begin{aligned} E[3] &\longrightarrow \frac{\mathbb{Z}}{3\mathbb{Z}} \times \frac{\mathbb{Z}}{3\mathbb{Z}} \\ [0, 1, -\zeta] &\longmapsto (1, 0) \\ [1, 0, -1] &\longmapsto (0, 1) \end{aligned}$$

Sabemos que si dos puntos P, Q son 3-torsión, entonces $\varphi(P, Q)$ nos da otro punto 3-torsión, por lo que podemos estudiar $\varphi(p_i, p_j)$, y ver la configuración de rectas que quede.

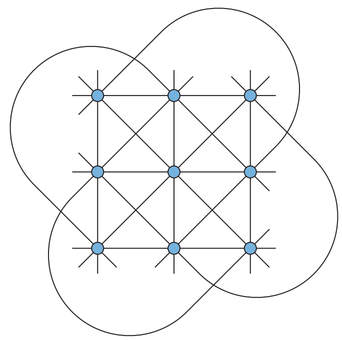

Figura 1. Los puntos de $E[3]$ ordenados de izquierda a derecha, de arriba hacia abajo, y las rectas que los unen.

Esto es lo que se conoce como la *configuración de Hesse*, y está compuesto por 9 puntos por los que pasan 4 rectas, y 12 rectas que contienen a 3 de estos puntos. Se denota $(9_4, 12_3)$. El dual de esta configuración es $(12_3, 9_4)$, el cual está formado por 12 puntos que son intersección de 3 rectas, y 12 rectas que contienen a 4 de estos puntos. Esta última es la *configuración dual de Hesse*.

Referencias

[AD08] Michela Artebani and Igor Dolgachev, *The hesse pencil of plane cubic curves*, 2008.

[Ful] William Fulton, *Algebraic curves, an introduction to algebraic geometry*, 2008.