INTRODUCCIÓN A LAS SUPERFICIES ELÍPTICAS

BENJAMÍN MACÍAS QUEZADA

RESUMEN. Las superficies elípticas son superficies (suaves, proyectivas) fibradas sobre una curva (suave, proyectiva), de modo que cada fibra sea una curva de género 1, y a lo más finitas son singulares. En esta charla introduciremos estos objetos geométricos, concentrándonos en dos ejemplos clásicos: una superficie de K3 inspirada en un problema de Diofantos, y la superficie asociada a un pincel de cúbicas—que resulta coincidir con la explosión de $\mathbb{P}^2$ en nueve puntos.

ÍNDICE

1. PRELIMINARES SOBRE CURVAS ELÍPTICAS

La exposición de esta sección está basada en [Mir89, §I.1] y [SS10, §2]. Una *curva elíptica* sobre un cuerpo k es una curva suave, proyectiva, de género 1, con un punto distinguido, definida sobre k.

Ejemplo 1.1. Consideremos la *ecuación de Weierstrass*, dada por $y^2 = x^3 + Ax + B$, donde A, B son constantes en algún cuerpo k. Cuando $\Delta := 4A^3 + 27B^2 \neq 0$ en k, dicha ecuación define una curva elíptica sobre k. Homogenizando la ecuación obtenemos una curva proyectiva, la condición sobre Δ asegurará que dicha curva sea suave, el que tenga género 1 es gracias a la Fórmula del Género, y el punto distinguido será el punto al infinito.

Los primeros estudios de este tipo de curvas eran más bien artesanales, y una técnica estandar utilizada fue una generalización del método de secantes-tangentes usada para estudiar puntos racionales en circunferencias. Consideremos una circunferencia en $\mathbb{P}^2_{\mathbb{Q}}$ con un punto P con coordenadas racionales, y $\ell \subseteq \mathbb{P}^2_{\mathbb{Q}}$ una recta por P (que intersecta un total de dos veces a C gracias al Teorema de Bézout). Se puede probar directamente que el otro punto que ℓ intersecta es racional si y solo si la pendiente de ℓ es racional o infinita.

En el caso de una curva elíptica sobre $\mathbb{Q}$ dada por una ecuación de Weierstrass (cúbica, por lo que una recta intersecta tres veces a la curva), si partimos de un punto racional y una recta por dicho punto, puede que no intersecte en otro punto racional. Lo que sí ocurre es que una recta por dos puntos racionales cortará en otro punto racional. Por tanto, tenemos un método geométrico para producir puntos racionales en curvas elípticas. Pero, ¿qué pasa con el punto al infinito, $[0:1:0]$?

Fecha: 24 de octubre de 2024.

Si consideramos un punto $P \in E$, y escribimos su reflexión respecto al eje x como $-P$, la recta que pasa por estos dos puntos es vertical (paralela al eje y), por lo que el tercer punto de intersección con E es al infinito. Esto quiere decir que si operamos de este modo un punto con su "opuesto", siempre obtenemos el punto al infinito. Para realizar esta noción de "oposición" de forma correcta, este punto al infinito $0 := [0 : 1 : 0]$ debería actuar como un neutro para esta operación. Sin embargo, la recta que pasa por 0 y por $P \in E$, intersecta de nuevo al punto $-P \in E$ (en vez de lo deseado, P). Para parchar este inconveniente se realiza una leve manipulación formal, definiendo la *suma* de dos puntos $P, Q \in E$ como el opuesto (reflexión respecto al eje x) del tercer punto de intersección de la recta por P y Q, que se escribe simplemente como $P + Q$. Esta operación está bien definida en E, y satisface, por construcción, (i) $P + 0 = P$, (ii) $P + (-P) = 0$, y (iii) $P + Q = Q + P$. Así, esta suma en puntos de E es casi una operación de grupo. Resulta que sí es asociativa, por lo que E es efectivamente un grupo abeliano con esta suma.

El punto de vista moderno permite definir, alternativamente, el grupo de una curva elíptica general (es decir, no necesariamente en forma de Weierstrass) a través de sus divisores. Un *divisor* en una curva (elíptica) C es una combinación $\mathbb{Z}$-lineal formal finita de puntos de la curva. La suma de los coeficientes de dicha suma se llama el *grado* del divisor. El conjunto de todos los divisores de una curva es un grupo abeliano (es el grupo abeliano libre en los puntos de la curva después de todo), y lo denotamos por $\mathrm{Div}(C)$. El subconjunto de los divisores de grado 0 es de hecho un subgrupo de $\mathrm{Div}(C)$, que se denota $\mathrm{Pic}^0(C)$. Con esto, se puede probar que el *mapa de Abel–Jacobi*,

$$\begin{aligned} J\colon C(k) &\longrightarrow \mathrm{Pic}^0(C) \\ P &\longmapsto (P) - (O) \end{aligned}$$

es una biyección, y la ley de grupo en $C(k)$ será aquella que haga de esta función un isomorfismo de grupos. El que dicho mapa sea biyectivo no es trivial: el caso de k general es una aplicación del Teorema de Riemann–Roch, pero en el caso de k algebraicamente cerrado se puede hacer directamente.

2. Diofantos III.17

Esta sección sigue [Pan15, §5] El decimoséptimo problema del Libro III de Diofantos de Alejandría solicita dos números tales que su producto sumado a alguno de ellos o a ambos, resulte en un cuadrado perfecto. Algebraicamente, este problema corresponde a resolver en $\mathbb{Q}$ el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} xy + x + y &= u^2 \\ xy + x &= v^2 \\ xy + y &= w^2 \end{cases}. \tag{2.1}$$

El método de Diofantos para resolver este problema es, dado x, notar que cuando $y = 4x - 1$, se tiene que el producto resulta en

$$xy = x(4x - 1) = 4x^2 - x \implies xy + x = 4x^2.$$

En tanto el último término es un cuadrado, esto verifica que el par (x, y) satisface la segunda de las ecuaciones del sistema. De este modo, el considerar esta restricción sobre y, reduce el sistema original a

$$\begin{cases} 4x^2 + 4x - 1 &= u^2 \\ 4x^2 + 3x - 1 &= w^2 \end{cases}. \tag{2.2}$$

Restando ambas ecuaciones se obtiene que

$$x = u^2 - w^2 = (u + w)(u - w),$$

a partir de lo que deduce que se debe cumplir

$$\begin{cases} u+w=4x \\ u-w=\frac{1}{4} \end{cases}.$$

Esto permite despuejar u (o w) en función de x, por lo que podemos reemplazar este valor en la ecuación correspondiente de 2.2, lo que a su vez resulta en una ecuación cuadrática en x, que es sencilla de resolver.

El tratamiento de Diofantos es indudablemente algebraico. Traduzcamos su método a geometría moderna. En primer lugar, el sistema 2.1 define una superficie $X \subseteq \mathbb{P}^5_{\mathbb{Q}}$. Podemos despejar y de la segunda ecuación del sistema 2.1, lo que resulta en $y = \frac{v^2}{x} - 1$, o, definiendo la variable $t := v/x$, en que

$$y = t^2 x - 1.$$

De acá, Diofantos estudia ya no todo X, sino que se restringe a $X_t := X \cap \mathbb{V}(t^2x - y - 1)$ (que es lo que pasó a nivel algebraico al reducir al sistema 2.2), y busca puntos racionales aquí. Equivalentemente, este conjunto aparece a través del mapa

$$\begin{aligned} \pi\colon X &\dashrightarrow \mathbb{P}^1 \\ [x:y:u:v:w] &\longmapsto v/x \end{aligned} \tag{2.3}$$

como $\pi^{-1}(\{t\})$. Así, el método de Diofantos es buscar puntos racionales en la fibra X_{t_0} de algún punto racional $[t_0 : 1] \in \mathbb{P}^1$. ¿Por qué habría esperanza de que esto funcione?

El sistema reducido (análogo a lo que pasó en 2.2) queda, en coordenadas proyectivas, como

$$\begin{cases} t^2Y^2 + t^2YZ - Z^2 & = U^2 \\ t^2Y^2 + (t^2-1)YZ - Z^2 & = W^2 \end{cases},$$

por lo que cada X_t es una intersección suave de dos cuádricas en $\mathbb{P}^3$, y de hecho casi toda X_t será de género 1[1]. Así, casi todas las fibras de π son casi curvas elípticas: ¡nos faltan solo los puntos distinguidos!

Es decir, a cada $t \in \mathbb{P}^1$ le queremos asignar un punto $O_t \in X_t = \pi^{-1}(\{t\})$, lo que define una función $\sigma\colon \mathbb{P}^1 \to X$ tal que $\pi \circ \sigma = \mathrm{id}_{\mathbb{P}^1}$. Este tipo de mapas se llaman *secciones* de π, por lo que podemos enunciar nuestro problema de marcar puntos en cada fibra de π como el de encontrar una sección de π. Notamos que el mapa

$$\sigma([t:1]) := [1:t:t:0] \tag{2.4}$$

es una sección de π, lo que nos permite definir un punto distinguido en cada X_t, lo que hace de todos las X_t de género 1 son en realidad curvas elípticas, por lo es muy natural buscar puntos racionales en ellas.

Notar que no todas las fibras son curvas elípticas: hay fibras de género 0, las que no son suaves, pero también hay fibras de género 1 que son singulares. Lo que ocurre es que estas fibras molestas, o *fibras malas*, son finitas por lo que en verdad casi todas las fibras de $\pi\colon S \to \mathbb{P}^1$ son curvas elípticas. Esto se suele decir como que la *fibra genérica* de π es una curva elíptica.

3. Superficies elípticas

Seguimos [Mir89, §I.2] y [SS10, §3]. Problemas similares al estudiado en la sección anterior se han abstraido totalmente a geometría algebraica moderna. A partir de ahora, consideramos k algebraicamente cerrado. Una *superficie elíptica* (sobre k) es una superficie suave proyectiva equipada de una *fibración elíptica*, un morfismo sobreyectivo $\pi\colon S \to C$ hacia una curva suave projectiva tal que casi todas las fibras son curvas suaves de género 1 (es decir, solo finitas son singulares).

[1]Esto es no trivial. Es gracias a que X_t es una intersección completa de dos cuádricas en $\mathbb{P}^3$, por lo que podemos calcular el polinomio de Hibert de X_t, o aplicar la Fórmula de Adjunción.

A priori, pedir que estas fibras sean curvas elípticas no es del todo apropiado, porque la existencia de un punto distinguido en cada fibra es equivalente a la existencia de una sección de π, lo que es un caso especial—aunque común en la literatura. En caso de ser necesario, referiremos a ellas como *superficies elípticas con sección.*

Ejemplo 3.1. La sección anterior verifica que la superficie X dada por el sistema 2.1 es una superficie elíptica con sección. La fibración es dada por la ecución 2.3, y la sección por la ecuación 2.4. Este problema exhibe que las superficies elípticas pueden aparecer naturalmente en preguntas de índole aritmético, y por tanto estuidarlas es de interés aritmético general.

Antes de revisar más ejemplos de superficies elípticas, nos detendremos a mencionar algunas preguntas geométricas relativas a ellas que se han estudiado (¡satisfactoriamiente!). Distinguimos dos clases (ontológicas):

- Las *locales*, como por ejemplo la clasificación de las fibras singulares, el estudio de la monodromía al rededor de una fibra singular, el comportamiento local del J-mapa, entre otros.
- Las *globales*, identificar sus invariantes numéricos, la fórmula para el bundle canónico, su dimensión de Kodaira, el comportamiento global del J-mapa, entre otros.

4. Pincel de cúbicas planas

Nos basamos en [Mir89, Example I.5.1, pp. 7–8], y [SS10, §3.2]. Consideremos $f, g \in k[x, y, z]$ polinomios homogéneos de grado 3 coprimos, de modo que $C_1 := \mathbb{V}(f)$ y $C_2 := \mathbb{V}(g)$ sean cúbicas no-singulares en $\mathbb{P}^2$ sin componentes en común. Así, el Teorema de Bézout indica que el número de intersecciones entre C_1 y C_2 es exactamente 9 (contando las multiplicidades). Por simplicidad de los argumentos, supongamos que todas las multiplicidades que aparecen son 1, por lo que disponemos efectivamente de nueve puntos distintos en la intersección de las cúbicas.

Para cada $[t : s] \in \mathbb{P}^1$, consideremos

$$E_{[t:s]} := \mathbb{V}(tf + sg).$$

La colección de todos estos conjuntos algebraicos corresponde a una familia de cúbicas parametrizada por $\mathbb{P}^1$, también llamado un *pincel* de cúbicas. Para casi todo valor de t, se tiene que $E_t := E_{[t:1]}$ es no-singular, y por tanto podrá ser realizada como curva elíptica.

Intentemos dotar a este pincel de estructura de superficie elíptica. Para ello, consideremos la superficie

$$X := \{(p, t) \in \mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^1 : p \in E_t\},$$

de modo que la proyección a la segunda coordenada $\pi\colon X \to \mathbb{P}^1$ exhibe a X como superficie elíptica: la fibra sobre t es precisamente E_t.

La superficie X puede parecer una arbitrariedad. ¿Qué es realmente? Consideremos la proyección a la primera coordenada, $\psi\colon \mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^2$. Por definición, se tiene que $\psi^{-1}(\{p\}) = \{t \in \mathbb{P}^1 : E_t \ni p\}$, pero como los p_i están en cada E_t, se tiene que

$$\psi^{-1}(\{p_i\}) = \mathbb{P}^1$$

para cada $i = 1, \ldots, 9$. Esta aparición de copias de $\mathbb{P}^1$ es una señal característica de las explosiones en $\mathbb{P}^2$.

Verifiquemos que X es la explosión de $\mathbb{P}^2$ en $p_1, \ldots, p_9$. Para esto, basta verificar que ϕ es birracional, es decir, un isomorfismo racional en un abierto de $\mathbb{P}^2$. El candidato más natural es el complemento de los nueve puntos. En efecto, resta verificar que ψ es inyectivo en este abierto, es decir, que para $p \neq p_i$ con $i = 1, \ldots, 9$, la fibra $\psi^{-1}(\{p\})$ consiste en un solo punto. Pero esto es directo, pues si p estuviese en más de una fibra, digamos en E_t y $E_{t'}$, dichas fibras se intersectarían en un total de 10 puntos: los nueve originales que siempre están, más este p. Pero esto no puede pasar, pues el Teorema de Bézout asegura que la intersección de estas dos cúbicas es exactamente 9.

Referencias

[Mir89] Rick Miranda, *The basic theory of elliptic surfaces: Notes of lectures*, Dottorato di ricerca in matematica / Università di Pisa, Dipartimento di Matematica, ETS Editrice, 1989.

[Pan15] René Pannekoek, *Diophantus revisited: On rational surfaces and k3 surfaces in the arithmetica*, 2015.

[SS10] Matthias Schuett and Tetsuji Shioda, *Elliptic surfaces*, 2010.

Correo electrónico:: `benjaquezadam@uc.cl`

Departamento de Matemática, Pontificia Universidad Católica de Chile. Facultad de Matemáticas, Av. Vicuña Mackenna 4860, Macul, RM, Chile