"Introducción al MMP y acotamiento" 26/3/19 I (1)

X = variedad proy. normal $/ k=\bar{k}$, $\mathrm{Char}(k)=0$.

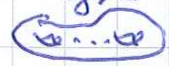
Obj: Clasificar todas las X módulo equivalencia biracional.

$X \underset{bir}{\simeq} Y \iff \exists\, \mathcal{U} \subseteq X,\ V \subseteq Y$ abiertos Zariski $\neq \emptyset$ tq $\mathcal{U} \underset{isom}{\simeq} V$.

Ej1- ($\dim X = 1$) $X \underset{bir}{\simeq} Y \iff X \underset{iso}{\cong} Y$ (normal = liso en dim 1)

Si $k=\mathbb{C}$, hay 3 tipos de curvas.

Esferas con g hoyos:

	$g=0$ 	$g=1$ 	$g\geq 2$ 
π_1	$\{1\}$	$\mathbb{Z}^2$	$2g$ gen
Curvatura	$+$	0	$-$
Formas holom.	$\nexists$	no se anulan	g indep.
$\deg(K_X)$	$-$	0	$+$

Def1- X normal proyectiva dim n, $X_0 \subseteq X$ parte lisa (abierto).
Se define K_X (divisor canónico) ~~como~~ un divisor de Weil, el cual se obtiene al extender un divisor de Weil K_{X_0} asociado a $\Omega^n_{X_0} = \Lambda^n \Omega_{X_0}$.

⚠ Si X sing, no todo divisor de Weil es Cartier. (Ej $(x^2+y^2=z^2) \supset$ recta (por $(0,0,0)$))

Decimos que D div de Weil es $\mathbb{Q}$-Cartier si $\exists\, m>0$ tq mD Cartier.
En particular, si K_X es $\mathbb{Q}$-Cartier decimos que X es $\mathbb{Q}$-Gorenstein.

Obs1- Si D $\mathbb{Q}$-Cartier y $C \subseteq X$ curva

$$D \cdot C := \frac{1}{m}\left(\deg_C(\mathcal{O}_X(mD)|_C)\right) \in \mathbb{Q}.$$

Def.- Decimos que D $\mathbb{Q}$-Cartier es nef si $D \cdot C \geq 0$ $\forall C \subseteq X$ curva.

9. Modelos minimales y abundancia.

X = Variedad $\mathbb{Q}$-Gorenstein
Si $|mK_X| \neq \emptyset$ para cierto $m \in \mathbb{N}^{>0}$ tenemos
$\varphi_m : X \dashrightarrow \mathbb{P}(H^0(mK_X))$

Teorema (Iitaka): $\exists\, \varphi_\infty : X \dashrightarrow Y_\infty$ = Imagen

tq los $\varphi_m : X \xrightarrow[|mK_X|]{} Y_m$ se estabilizan para $m \gg 0$ y divisible.
φ_∞: fibración de Iitaka.

Dimensión de Kodaira: $\kappa(X) := \begin{cases} -\infty & \text{si } |mK_X| = \emptyset \\ \dim Y_\infty & \text{sino} \end{cases}$

Obs.- La fibra "muy general" F de φ_∞ verifica $\kappa(F) = 0$.
[PAG LAZARSFELD: Thm 2.1.33].

dim 1,2,3

Conj 1: $(\kappa(X) \geq 0)$: $X \underset{bir}{\simeq} X'$ var. proy. normal (singular) con $K_{X'}$ nef.

Más aún, $K_{X'}$ es semi-amplio ie $\exists m \gg 0$ tq $X' \xrightarrow[|mK_X|]{} Z$, morfismo $(\dim Z = \kappa(X))$ con:
① fibra muy general F tal que $K_F \equiv 0$ (ie, $K_F \cdot C = 0$ $\forall C \subseteq F$)
② Z "muy cercano" a tener K_Z amplio.

Conj 2: $(\kappa(X) = -\infty)$ $X \underset{bir}{\simeq} X' \xrightarrow{f} Y$ con
① $\dim Y < \dim X$
② fibra general F tiene $-K_F$ amplio
③ $\rho_{X'} - \rho_Y = 1$ (aquí: ρ_X = rango $\mathrm{Pic}(X)$)

Luego toda Variedad se descompone en 3 tipos:

- $K_X < 0$ (Variedades de Fano)
- $K_X \equiv 0$ (" de Calabi-Yau)
- $K_X > 0$ ((log) tipo general)

Pregunta (acotamiento): Cuántos familias existen? finitos?

§ Singularidades. Sea (X, Δ) un par (log):

1. X variedad proyectiva normal.
2. $\Delta = \sum_{\text{finita}} a_i D_i$, $a_i \in [0,1]$ (reales) y $D_i \subseteq X$ div. primo
3. $K_X + \Delta$ es $\mathbb{R}$-Cartier

(?) $\overset{\parallel}{\sum b_j L_j} + \sum d_k \operatorname{div}(f_k)$, $b_j, d_k \in \mathbb{R}$, $f_k \in k(X)$.
↑ Cartier

Log-resolución de (X,Δ) es $Y \xrightarrow[\text{bir}]{\pi} X$ con Y proj. liso y
$\operatorname{Supp}(\underbrace{\pi_*^{-1}(\Delta)}_{\text{transformada estricta}} + \operatorname{Exc}(\pi))$ tiene "simple normal crossings" (SNC).

Hironaka (char $=0$): log-resolución existe.

Como $K_X + \Delta$ es $\mathbb{R}$-Cartier.

$$K_Y + \pi_*^{-1}\Delta + \sum E_i = \pi^*(K_X + \Delta) + \sum a_i E_i$$

$a_i = a_\ell(E_i, \Delta)$ log discrepancia.

obs/.- $a_i - 1 = a_\ell(E_i, \Delta) - 1 = a(E_i, \Delta)$
↑ discrepancia

Def. Decimos que (X, Δ) es:

$$\left\{\begin{array}{l} \text{terminal} \\ \text{canónico} \\ \text{Kawamata log terminal (klt)} \\ \text{log - canónico (lc)} \\ \varepsilon\text{- lc} \\ \quad \varepsilon > 0 \end{array}\right\} \text{ si } \forall \text{resol. } Y \xrightarrow{\pi} X \left\{\begin{array}{ll} a(E_i, \Delta) > 0 & \forall i \\ \quad '' \quad \geq 0 & \\ \quad '' \quad > -1 & \lfloor \Delta \rfloor = 0 \\ \quad '' \quad \geq -1 & \\ \quad\quad \geq -1+\varepsilon & \end{array}\right.$$

Ejl. (luego veremos):

1. $\underset{\text{liso}}{(X}, \underset{\sum b_i D_i}{\Delta})$ tq $\operatorname{Supp}(\Delta)$ es SNC $\Rightarrow$ (X, Δ) lc $\Leftrightarrow b_i \leq 1, \forall i$

2. $(\mathbb{P}^2, \underset{\text{cúbica nodal}}{\alpha})$ es lc

3. $(\mathbb{P}^2, c \underset{\text{cúbica nodal}}{\alpha})$ es l.c. $c \leq \frac{5}{6}$ y klt para $c < \frac{5}{6}$

4. X_g cono proy sobre una curva lisa de género g:

   $(X, 0)$ klt si $g = 0$
   $(X, 0)$ lc pero no klt si $g = 1$
   $(X, 0)$ no es lc si $g \geq 2$.

5. $(n \geq 2)$ X_n : Cono proy sobre una curva racional de grado n en $\mathbb{P}^n$

$$W_n = \mathbb{P}(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1} \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-n)) \text{ Hirzebruch.}$$

$$K_{W_n} + \left(\frac{n-2}{n}\right) E = \pi^* K_{X_n} \Rightarrow X_n \text{ es } \underbrace{\frac{2}{n}}_{\varepsilon} - \text{lc}$$

¿Porqué trabajar con pares?

1. Iitaka (variedades abiertas) $\mathcal{U}$ cuasi-proy
$\Rightarrow$ [Hironaka] $\exists\, X \supseteq \mathcal{U}$ var. proy tq $\Delta = X \setminus \mathcal{U}$ div. snc.

2. Argumentos de inducción en la dim. X liso, $D \subseteq X$ div reducido $\Rightarrow K_D = (K_X + D)|_D$

Si X singular más complicado $(K_X + D)|_D = K_D + \mathrm{Diff}(D)$.

3. MMP produce pares!
Antes: "Z muy cercano a tener K_Z amplio"
$\exists\, \Delta_Z$ tq (Z, Δ_Z) es klt y $K_Z + \Delta_Z$ amplio.