Aclaración ($\mathbb{R}$-divisores): Un $\mathbb{R}$-divisor (de Weil) es $D = \sum_{\text{finita}} a_i D_i$; $a_i \in \mathbb{R}$, D_i div primo.

$D \sim_{\mathbb{R}} D'$ si $\exists\, d_k \in \mathbb{R}$, $f_k \in k(X)$ tq $D - D' = \sum d_k \operatorname{div}(f_k)$

D es $\mathbb{R}$-Cartier si $D \sim_{\mathbb{R}} \sum b_j L_j$ con $b_j \in \mathbb{R}$ y L_j div Cartier.

⚠ Es posible que D es $\mathbb{R}$-Cartier pero ningún múltiplo $\neq 0$ de D sea Cartier.

Teorema: Sean $\varepsilon > 0$ y $n \in \mathbb{N}^{>0}$ dados. Entonces el conjunto

$$\{(X, \Delta) \text{ par } \varepsilon\text{-lc de dim } n \text{ con } -(K_X + \Delta) \text{ amplio}\}$$

es acotado si:

1) [Borisov-Borisov '93]: X es tórica ✓
2) [Alexeev '94]: $n = 2$ ✓
3) [Birkar 2016]: $\forall n$ ✓✓

MMP para superficies suaves: S sup. proyectiva suave.

Recuerdo: $E \subseteq S$ curva irred y reducida es curva (-1) si $E \cong \mathbb{P}^1$ y $E^2 = -1$.

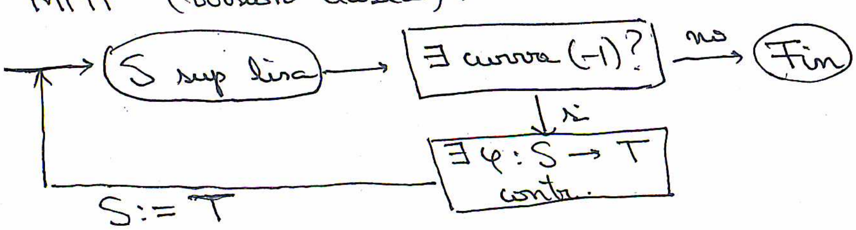
$\overset{}{\underset{RR}{\Longleftrightarrow}}$ $K_S \cdot E < 0$ y $E^2 < 0$ (Idea: $0 \leq h^1(\mathcal{O}_E) = \frac{1}{2}(K_S + E)\cdot E + 1$)

Castelnuovo: Si $E \subseteq S$ curva (-1) $\Rightarrow \exists!\ \varphi : S \to T$ ("contracción de E") tq

- $\varphi(E) = \{pt\}$, $\operatorname{Exc}(\varphi) = E$
- T sup. proy lisa

($\Rightarrow \varphi$ es el blow-up del punto $\varphi(E)$).

"MMP" (versión clásica):



Mori (1982): Reemplazar "$\exists$ curva (-1)?" por "K_S nef?"

Teorema: Si K_S no es nef, $\exists!\ \varphi : S \to W$ "contracción extremal" (K_S-negativa) tq

1. φ no es isom.
2. $\forall C \subseteq S$, $\varphi(C) = \{pt\} \Rightarrow K_S \cdot C < 0$
3. Si $\varphi(C_1)$ y $\varphi(C_2)$ son pts $\Rightarrow \exists\, \lambda \in \mathbb{Q}^{>0}$ tq $[C_1] \equiv \lambda [C_2]$
4. φ tiene fibras conexas, W proy normal (lisa en este contexto)

Obs: (a) Si $C = \sum_{\text{finita}} a_i C_i$ (1-ciclo) (ie, div de Weil)
(a_i entero, C_i curva irred)

$\Rightarrow C_1 \equiv C_2 \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} D \cdot C_1 = D \cdot C_2$ $\forall D$ div de Cartier

$N_1(S)_{\mathbb{Z}} := \{1\text{-ciclos}\}/\equiv$ y $N_1(S) = N_1(S)_{\mathbb{R}} = N_1(S)_{\mathbb{Z}} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$.

b) Si H div amplio en W y $C \subseteq S$ tq $[C] \in \mathbb{Q}^{\geq 0}[C]$ con $\varphi(C) = \{pt\}$ (2

$$\underset{\substack{\text{fórmula}\\ \text{proyección}}}{\Longrightarrow} \quad \varphi^* H \cdot C = H \cdot \underbrace{\varphi_* C}_{=0} = 0 \iff \varphi^* H \cdot C' = 0 \iff \varphi(C') = \{pt\}$$

c) Si $\overline{NE}(S) = \{1\text{-ciclos efectivos}\}/\equiv \;\subseteq N_1(S)_{\mathbb{R}}$ (cono de Mori) y D div de Cartier. Entonces D amplio ssi:

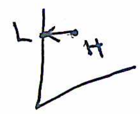
(i) [Kleiman]: $D \cdot C > 0 \quad \forall [C] \in \overline{NE}(S) \setminus \{0\}$

(ii) [Nakai-Moishezon]: $D^2 > 0$ y $D \cdot C > 0 \quad \forall C \subseteq S$ curva.

El teorema es consecuencia de:

Teorema (racionalidad): Si K_S no es nef y H amplio en S.

$\Rightarrow r_H = r := \sup\{t \in \mathbb{R}^{\geq 0}$ tq $H + tK_S$ nef$\}$ es racional.



Teorema ("base point freeness" (bpf)): $L := H + rK_S$ $\mathbb{Q}$-Cartier y nef.

$\Rightarrow |mL|$ no tiene pts base (bpf) si $m \gg 0$ y divisible

Dem de bpf (idea): L nef $\Rightarrow L^2 \geq 0$.

$\boxed{\text{Caso 1}}$ $L^2 > 0$: L nef & no amplio $\Rightarrow \exists C \subseteq S$ tq $L \cdot C = 0$

Índice de Hodge: $L^2 > 0$ y $L \cdot C = 0 \Rightarrow C^2 < 0$

$\Rightarrow 0 = L \cdot C = \underbrace{H \cdot C}_{>0} + \underbrace{r}_{>0} K_S \cdot C \Rightarrow K_S \cdot C < 0$ $\Big\}$ $\Rightarrow C$ curva (-1).

Castelnuovo: $\exists \varphi : S \to T$ contr. de C. y $L_T := \underbrace{\varphi_* H}_{H_T \text{ amplio}} + rK_T$ nef

verifican $L_T^2 > 0$ y $L = \varphi^* L_T$.

Mismo argumento: $(S, L) \rightsquigarrow (T, L_T)$: L_T amplio ✓ ($\Rightarrow L = \varphi^* L_T$ bpf)

o $\exists C_T$ curva (-1) tq $L_T \cdot C_T = 0$:

Continuamos hasta eventualmente tener ~~[illegible]~~ $\rho_T = 1$ y L_T nef $\neq 0 \Rightarrow L_T$ amplio ✓

$\boxed{\text{Caso 2}}$ $L^2 = 0$: $L = H + rK_S \Rightarrow -K_S = -\frac{1}{r} L + \frac{1}{r} H$

Obs: $mL - K_S = \frac{1}{r}\underbrace{H}_{\text{amplio}} + \left(\frac{mr-1}{m}\right)\underbrace{L}_{\text{nef}}$ es amplio (Kleiman)

$\underset{\text{Kodaira}}{\Longrightarrow} h^i(mL) = h^i((mL - K_S) + K_S) = 0$ si $i > 0$.

$\boxed{\text{Caso (2.1)}}$: $L \equiv 0 \Rightarrow H \equiv -rK_S$, i.e., $-K_S$ amplio (S del Pezzo)

$\underset{\text{Kodaira}}{\Longrightarrow} h^i(\mathcal{O}_S) = 0$ si $i > 0$.

Como $h^1(\mathcal{O}_S) = 0$ (no hay Pic^0) $\Rightarrow L \sim_{\mathbb{Z}} 0$ ✓

(otra forma: $h^0(L) = \chi(L) \underset{RR}{=} \chi(\mathcal{O}_S) \underset{\text{del Pezzo}}{=} 1$
similar: $h^0(-L) = 1$ $\Big\}$ $\Rightarrow L \cong \mathcal{O}_S$)

Caso (2.2) $L \not\equiv 0$ (ie, $\exists\, C \subseteq S$ tq $L\cdot C > 0$)

Sea $m \gg 0$ tq $mH - C$ amplio $\Rightarrow m\cdot(L\cdot H) = L\,\underbrace{(mH-C)}_{\geq 0} + \underbrace{L\cdot C}_{>0} \Rightarrow L\cdot H > 0$

$0 = L^2 = L\,(H + rK_S) \Rightarrow L\cdot K_S < 0$.

RR: $\chi(mL) = h^0(mL) = \chi(\mathcal{O}_S) + \frac{m}{2}(-L\cdot K_S) > 0$ si $m \gg 0$.

Escribir $|mL| = |\underset{\text{móvil}}{M}| + \underset{\text{fijo}}{F}$, M es nef

$\Rightarrow 0 \leq M^2 \underset{M \text{ nef}}{\leq} M\,(M+F) = m\,M\cdot L \underset{L \text{ nef}}{\leq} (M+F)\cdot mL = (mL)^2 = 0$

$\Rightarrow M^2 = M\cdot F = F^2 = 0$

Luego M es bpf. Sea $\Phi : S \xrightarrow{|M|} V$ y sea $S \xrightarrow{\varphi} W \xrightarrow{\varphi'} V$ factorización de Stein

φ: fibras conexas; φ': finito; proy normal [Hartshorne Ch. III] o Beauville V.17

- $\dim W = 1$
- $M = \Phi^* \underset{\text{amplio en } V}{H_V}$ $\quad (M\cdot F = \Phi^* H_V\cdot F = 0 \Rightarrow \Phi(F) = \{pt\})$

$F^2 = 0 \Rightarrow F$ prop a fibras de φ: $F = \varphi^*\left(\sum a_i\,[p_i]\right)$, $a_i \in \mathbb{Q}^{>0}$, $p_i \in W$

Si $m' \in \mathbb{N}^{>0}$ tq $m' a_i \in \mathbb{N}^{>0}$ $\forall i$

$\Rightarrow |m' m L| = |\varphi^* H_W|$ (amplio en W) bpf ✓ ■

Dem del Teo. de contr. extremales: Sea $L = H + rK_S \underset{\text{bpf}}{\Rightarrow} \exists!\, \varphi : S \xrightarrow{|mL|} V$ morfismo con fibras conexas

$\boxed{\text{Caso 1}}$ $\dim V = 2$: L nef pero no amplio

$\Rightarrow \exists\, C$ curva irred tq $\underbrace{L\cdot C}_{H\cdot C + rK_S\cdot C} = 0 = \frac{1}{m}(\varphi^* H_V)\cdot C \Rightarrow \varphi(C) = \{pt\}$ (H_V amplio)

$\Rightarrow K_S\cdot C < 0$.

Índice de Hodge: $L^2 > 0$ (sino $\dim V = 0$ o 1) & $L\cdot C = 0 \Rightarrow C^2 < 0$

$\Rightarrow C$ curva (-1). Tomar $W = V$.

$\boxed{\text{Caso 2}}$ $\dim V = 1$

(2.1) $\exists$ fibra $\varphi^{-1}(p)$ reducible : si $E \subsetneq \varphi^{-1}(p)$ comp irred $\Rightarrow E^2 < 0$ (Beauville II.9)

$L\cdot E = (H + rK_S)\cdot E = 0 \Rightarrow K_S\cdot E < 0$

Luego, E curva (-1) $\rightsquigarrow S \longrightarrow W$ contr. de E ✓

(2.2) Todas las fibras son irred ($\cong \mathbb{P}^1$) $\rightsquigarrow S \longrightarrow W$ $\mathbb{P}^1$-bundle.

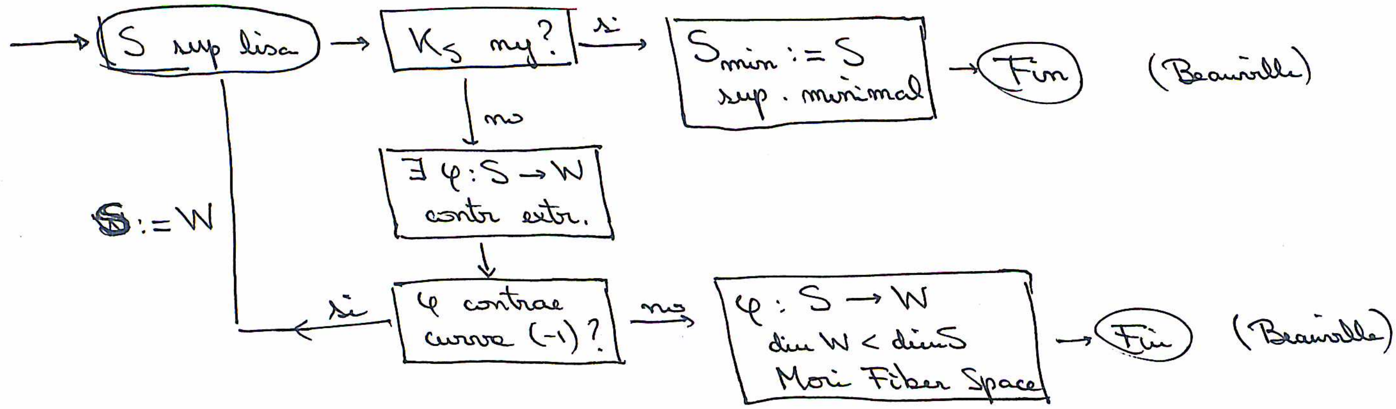
$\boxed{\text{Caso 3}}$ $\dim V = 0$: $L \equiv 0 \Leftrightarrow H \equiv -rK_S$

Si $\rho_S = 1$: $S \longrightarrow W = \{pt\}$. Además $q(S) = P_2(S) = 0 \Rightarrow S \underset{\text{bir}}{\sim} \mathbb{P}^2$

Como $\rho_S = 1$: $S \cong \mathbb{P}^2$ ✓

si $\rho_S > 1 \Rightarrow \exists H'$ amplio con $[H'] \notin \mathbb{Q}^{>0}[H]$. El morfismo $\varphi' : S \to V'$ asociado a $L' = H' + r' K_S$ es como en el caso 1 o 2 (sino: $H' \equiv -r' K_S \in \mathbb{Q}^{>0}[H]$ ■

<u>MMP</u> :



<u>Rayos extremales</u>: Sea $\sigma \subseteq \mathbb{R}^n$ un cono (convexo cerrado) (e.g. $\overline{NE}(S) \subseteq \mathbb{R}^{\rho_S}$)

Un subcono $\tau \subseteq \sigma$ es <u>extremal</u> si $\forall u, v \in \sigma$:

$$u + v \in \tau \Rightarrow u, v \in \tau .$$

Un <u>rayo extremal</u> es un subcono extremal de dim 1.

<u>Prop</u>: Sea S sup proy lisa y $C \subseteq S$ curva irred. Entonces:

1. si $C^2 \leq 0 \Rightarrow \partial \overline{NE}(S)$
2. si $C^2 < 0 \Rightarrow R = \mathbb{R}_{\geq 0}[C]$ rayo extremal en $\overline{NE}(S)$
3. si $C^2 = 0$ y $K_S \cdot C < 0$ y $\mathbb{R}_{\geq 0}[C]$ extremal $\Rightarrow S$ sup reglada, C fibra y $\rho_S = 2$.
4. si $R \subseteq \overline{NE}(S)$ rayo extremal $\Rightarrow R^2 \leq 0$ o bien $\rho_S = 1$.
5. si $R \subseteq \overline{NE}(S)$ rayo extremal y $R^2 < 0 \Rightarrow \exists C$ curva irred tq $R = \mathbb{R}_{\geq 0}[C]$

(Ver: Debarre, HDAG., Lemma 6.2).

<u>Teorema del cono</u>: $\exists$ una familia numerable de curvas racionales irred $\{C_i\}$ con $0 < -(K_S \cdot C_i) \leq 3$ y

$$\overline{NE}(S) = \overline{NE}(S)_{K_S \geq 0} + \sum_i \mathbb{R}_{\geq 0}[C_i]$$

Los rayos $R_i = \mathbb{R}_{\geq 0}[C_i]$ son extremales y pueden ser contraídos; y sólo se pueden acumular en $K_S^{\perp} := \{ z \in \overline{NE}(S) \text{ tq } K_S \cdot z = 0 \}$.

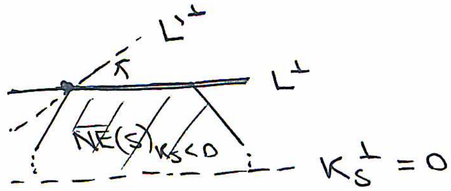
($\Rightarrow \forall H$ amplio y $\forall \varepsilon > 0$, ~~finitos~~

$$\overline{NE}(S) = \overline{NE}(S)_{(K_S + \varepsilon H) \geq 0} + \underbrace{\sum_{\text{finita}} R_i}_{\text{poliedral}}$$

En part: si $-K_S$ amplio: $\overline{NE}(S) = NE(S) = \sum_{\text{finita}} R_i$)

<u>Dem</u> (Idea): Sea L nef no amplio $\Rightarrow \overline{NE}(S) \cap L^\perp \neq \{0\}$

Si $\overline{NE}(S)_{K_S<0} \cap L^\perp \neq \{0\}$ es una cara:



$\rightsquigarrow \overline{NE}(S)_{K_S<0}$ generado por rayos R_i

<u>Hecho</u>: Si L nef, $r_L := \max\{t \in \mathbb{R}^{\geq 0} \mid L + tK_S \text{ nef}\} \in \mathbb{Q}^{>0}$

$\Rightarrow 6r_L \in \mathbb{N}^{>0}$

↳ Implica que los R_i discretos en $\{K_S<0\}$.

<u>Formalmente</u>: Sea $K_S, \underbrace{H_1, \dots, H_{g-1}}_{\text{amplios}}$ base de $N^1(S)_\mathbb{R} = \mathrm{Pic}(S)_\mathbb{R}/\equiv \;\cong \mathbb{R}^g$

Sea $L \in \mathrm{Pic}(S)$ nef y sup. que $F_L := L^\perp \cap \overline{NE}(S) \subseteq \{K_S<0\}$.

Considerar $\nu L + H_i$, $i = 1, \dots, g-1$, y $\nu \gg 0$: Sea $\nu \in \mathbb{N}^{>0}$ y

$$r(\nu) := \max\{t \in \mathbb{R}^{\geq 0} \mid \underbrace{\nu L + H_i + tK_S}_{\text{nef}}\} \in \mathbb{Q}^{>0}$$

Entonces:

1. $r(\nu)$ ·) creciente en ν ✓
   ·) acotada sup: si $z \in F_L \setminus \{0\} \Rightarrow \begin{cases} L\cdot z = 0 \\ (H_i + tK_S)\cdot z < 0 \text{ si } t \gg 0 \end{cases}$ $\quad F_L \subset \{K_S<0\}$

   Como $r(\nu) \in \frac{1}{6}\mathbb{Z}$, alcanza su máximo r_0.

2. Sup. que $r_0 = r(\nu)$ cte para $\nu \geq \nu_0$ y sea

   $L_i := 6(\nu L + H_i + r_0 K_S)$, $\nu > \nu_0$

   Si $z \in F^{\perp}_{L_i} \Rightarrow 0 = (\nu L + H_i + r_0K_S)\cdot z = \underbrace{(\nu - \nu_0)}_{>0}\underbrace{L\cdot z}_{\geq 0} + \underbrace{(\overset{\nu}{\overset{\shortparallel}{\nu_0}} L + H_i + r_0K_S)\cdot z}_{\geq 0}$

   $\Rightarrow \underline{L\cdot z = 0}$ $\quad (\Rightarrow (H_i + r_0K_S)\cdot z = 0)$.

   Luego: $\boxed{F_{L_i} \subseteq F_L}$

3. Si $\dim F_L \geq 2$, $\exists i$ y $\nu \gg 0$ tq $F_{L_i} \subsetneq F_L$: perturbaciones de F_L en $g-1$ direcciones l.i. ✓

$\Rightarrow$ 4. F_L contiene un rayo extr. $R \subseteq \overline{NE}(S)$.

5. Si $F_{L_i} = F_L = R \Rightarrow (H_i + r_0K_S)\cdot R = 0$

   Si $z \in R\setminus\{0\} \Rightarrow r_0 = \dfrac{H_i\cdot z}{(-K_S\cdot z)} \Rightarrow 6\,\dfrac{H_i\cdot z}{K_S\cdot z} \in \mathbb{Z}$

6. Los rayos extr R son discretos en $\{K_S<0\} \subseteq \mathbb{R}^g_{(K_S, H_1, \dots, H_{g-1})}$ coord

Todo R contiene un único $z \in R$ con $K_S \cdot z = -1$.

⑤ $\Rightarrow H_i \cdot z \in \frac{1}{6}\mathbb{Z}$ (coord discretas) ✓

Finalmente: Sea $B := \overline{NE}(S)_{K_S \geq 0} + \sum R_i \subseteq \overline{NE}(S)$

B cerrado pues R_i sólo se acumula en $\overline{NE}(S)_{K_S \geq 0}$.

Sup $B \subsetneq \overline{NE}(S) \Rightarrow \exists M$ nej tq $F_M \subseteq \overline{NE}(S)_{K_S < 0}$ disjunta de B.

④ $\Rightarrow \exists R \subseteq F_M$ rayo extr. y $R \subseteq B$ ↯ ∎