N. Vilches : Singularidades ADE / du Val / Canónicas

→ $X \subseteq \mathbb{A}^3$ superficie $\quad \sigma : B \to X$ blow-up
$\quad\ni p = (0,0,0)$

$\sigma_1 : \mathbb{A}^3 \to \mathbb{A}^3$
$(x, y_1, z_1) \mapsto (x, xy_1, xz_1)$
$\sigma^{-1}(p) = \{x = 0\}$

1) A_1 : $X = V(x^2+y^2+z^2) \subseteq \mathbb{A}^3$

σ_1 ; $x^2 + (y_1x)^2 + (z_1x)^2 = x^2(1+y_1^2+z_1^2)$

y $\sigma_1^{-1}(P) = V(1+y_1^2+z_1^2, x) = \Gamma$

2) A_2 : $Y = V(x^2+y^2+z^3)$

$\sigma_1 : x^2 + (y_1x)^2 + (z_1x)^3 = x^2(1+y_1^2+z_1^3x)$

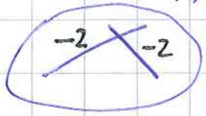
$\sigma_1 : V(1+y_1^2+z_1^3x) \longrightarrow Y$

$\sigma_3 ; (x_1z)^2 + (y_1z)^2 + z^3 = z^2(x_1^2+y_1^2+z)$

$\sigma_3 : V(x_1^2+y_1^2+z) \longrightarrow Y$

$\sigma_3^{-1}(P) = V(x_1^2+y_1^2+z, z) = V(x_1^2+y_1^2, z)$
$= V(x_1 - iy_1, z) \cup V(x_1+iy_1, z)$

$\sigma^{-1}(p)$



$\xrightarrow{\sigma} Y$

→ A_N : $X = V(x^2+y^2+z^{n+1})$

$$\frac{\partial}{\partial x} = 2x \qquad \frac{\partial}{\partial y} = 2y \qquad \frac{\partial}{\partial z} = (N+1)z^N$$

σ_3 : $(x_1 z)^2 + (y_1 z)^2 + z^{N+1} = z^2(x_1^2 + y_1^2 + z^{N-1})$

$$V(x_1^2 + y_1^2 + z^{n-1}) \xrightarrow{\sigma_3} X$$

$\sigma_3^{-1}(P) = V(x_1^2 + y_1^2 + z^{n-1}, z) = V(x_1 - iy_1, z) \cup V(x_1 + iy_1, z)$.

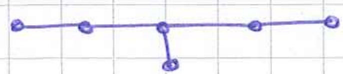
... Es repetir lo hecho antes.

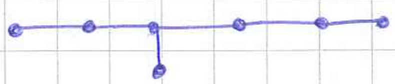
→ Grafo dual de conf. de curvas 

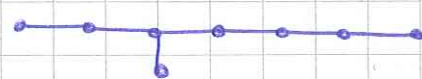
$\boxed{3}$ Singularidades de du Val.

$N \geq 1$ A_N $x^2 + y^2 + z^{N+1}$ 

$N \geq 4$ D_N $x^2 + y^2 z + z^{N-1}$ 

E_6 $x^2 + y^3 + z^4$ 

E_7 $x^2 + y^3 + yz^3$ 

E_8 $x^2 + y^3 + z^5$ 

→ Prop: Las sing. du Val se pueden caracterizar vía:

(1) Punto doble absoluto aislado: $P \in X$ es punto doble aislado y tiene resolución $X_N \to X_{N-1} \to \cdots \to X_1 \to X$ donde cada paso es blow-up pto doble aislado sobre $p \in X$.

(2) Clase Canónica: $\exists$ resolución de sing $\varphi : Y \to X$ tal que $K_Y = \varphi^*(K_X)$. (Resolución crepante).

(3) Polígono de Newton: En todo sist. analítico de coord, f tiene algún monomio de peso < 1 para los pesos $\frac{1}{2}(1,1,0)$, $\frac{1}{3}(1,1,1)$, $\frac{1}{4}(2,1,1)$, $\frac{1}{6}(3,2,1)$.

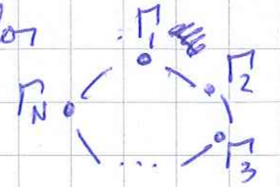
$\boxed{4}$ Aparición en modelos minimales.

Prop 1.- Sea X superficie, $\{\Gamma_i\}$ curvas -2, $\bigcup \Gamma_i$ conexo. Supongamos que $[\Gamma_i \Gamma_j]$ es negativo definida
$\Rightarrow$ $\bigcup \Gamma_i$ es uno de los diagramas de Dynkin.

Dem: (idea) • $\Gamma_i \Gamma_j \leq 1 \quad (i \neq j)$

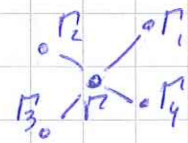
$$(\Gamma_i + \Gamma_j)^2 < 0$$
$$\underbrace{\Gamma_i^2}_{-2} + 2\Gamma_i\Gamma_j + \underbrace{\Gamma_j^2}_{-2} = -4 + 2\Gamma_i\Gamma_j \Rightarrow \Gamma_i\Gamma_j \leq 1 \,.$$

• No hay ciclos



$$(\Gamma_1 + \Gamma_2 + \dots + \Gamma_N)^2 < 0$$
$$\| $$
$$-2 \cdot N + 2N \rightarrow\leftarrow$$

• No hay nodos de grado ≥ 4



$$0 > (2\Gamma + \Gamma_1 + \Gamma_2 + \Gamma_3 + \Gamma_4)^2$$
$$\|$$
$$-16 + 16 = 0$$

Tarea: completar argumento ■

Teo: (Thm 1-6-4 Matsuki): Sea S un modelo minimal en dim 2 con $\kappa(S) = 2$. Luego:

(i) Existe cantidad finita de curvas C con $K_S \cdot C = 0$

(ii) Toda curva irreducible reducida C con $K_S \cdot C = 0$ es una curva -2.

(iii) El Grafo de cada componente conexa es uno de los diagramas anteriores.

Dem/.- (ii) $K_S^2 > 0$ (Por S min y dim Kodaira $= 2$)

y $K_S \cdot C = 0 \Rightarrow C^2 < 0$

Además $0 \leq h^1(C, \mathcal{O}_C) = \frac{1}{2}(K_S + C) \cdot C + 1 < 1$

$\Rightarrow h^1(C, \mathcal{O}_C) = 0$ y $C^2 = -2$ y $C \simeq \mathbb{P}^1$

(iii) $\Gamma_1, \dots, \Gamma_N$ constituyen comp conexos $K_S \cdot (\sum c_i \Gamma_i) = 0$
$\Rightarrow (\sum c_i \Gamma_i)^2 < 0 \Rightarrow$ neg def y aplico la proposición.