

Diana Torres : MMP reciente singularidades. 23/4/19

(1)

Ejemplo : Sea $A = \mathbb{C}^3/\mathbb{Z}_6$ $i: A \rightarrow A, x \mapsto -x$.

$A/\langle i \rangle$ tiene puntos singulares para los $x \in A$ tal que $2x = 0$.

Tiene 2^6 puntos fijos por i que serán singulares.

$$\mathbb{C}[x, y, z]^{(i)}, \quad x_0 := x^2, \quad x_1 := y^2, \quad x_2 := z^2, \quad x_3 := xy, \quad x_4 := yz, \quad x_5 := zx$$

$$\mathbb{P}^2 \rightarrow \mathbb{P}^5, \quad [x, y, z] \mapsto [x^2, y^2, z^2, xy, yz, zx] \text{ superficie de Veronese}$$

\therefore alrededor de $(0,0,0)$, es tomar el cono de la Veronese.

$$\rightarrow \text{Bl}_0(\text{Spec}(\mathbb{C}[x, y, z]^{(i)})) \rightarrow \text{Spec}(\mathbb{C}[x, y, z]^{(i)}) \quad \text{Spec}(\mathbb{C}[x, y, z]^{(i)})$$

$$E \cong \mathbb{P}^2 \hookrightarrow 0$$

$$\mathcal{O}_E(E) \cong \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(-2)$$

\rightarrow Sea $f: X \rightarrow Y$ la resolución de los 2^6 puntos singulares de $Y := A/\langle i \rangle \Rightarrow K_X = f^*K_Y + \sum_{i=1}^{64} a_i E_i$

$$K_{E_i} \sim \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(-3) \quad K_A \sim 0 \quad g: A \rightarrow A/\langle i \rangle = Y \quad g^*K_Y \sim K_A \sim 0$$

$$2K_Y \sim g_*g^*K_Y \sim g_*K_A \sim 0$$

$$K_{E_i} \sim \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(-3) \quad K_{E_i} = K_X + E_i \mid_{E_i} \sim f^*K_Y + \sum a_i E_i + E_i \mid_{E_i}$$

$$\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(-3) \sim K_{E_i} \sim (a_i + 1)E_i \mid_{E_i} \sim \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}((a_i + 1)(-2))$$

$$\therefore a_i = \frac{3}{2} - 2 \Rightarrow a_i = \frac{1}{2}$$

$$K_X \sim \sum_{i=1}^{64} \frac{1}{2} E_i \quad (\text{luego } Y \text{ tiene sing. terminales})$$

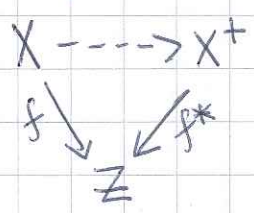
Tenemos que los rayos extremales en X con respecto a K_X son 2^6 líneas $l_i \subset E_i$

$$NE(X) = \cancel{NE(X)}_{K_X \geq 0} + \sum_{i=1}^{64} \mathbb{R}_+[l_i]$$

$$0 > K_X \cdot l_i = \frac{1}{2} l_i \cdot E_i = \frac{1}{2} \deg(E_i|_{l_i}) = \frac{1}{2} \cdot -2 = -1$$

Y es el modelo minimal de X .

Ejemplo I: (Flip) Sea $f: X \rightarrow Z$ morfismo biconcional propio entre 3-folds tal que el conjunto excepcional de f es una curva $C \subset X$ y K_X es ~~negativo~~ negativo en C , suponemos que $f(C) = p$.



$f: X \setminus C \rightarrow Z \setminus p$ morfismo.

Es fácil ver que K_Z no es \mathbb{Q} -Cartier.

Ejemplo: Considere $N = \mathbb{Z}^3$, $\{e_1, e_2, e_3\}$ vect. canónicos $e_4 = (1, 1, -2)$
 $e_5 = (-1, -1, 1)$

Por 1 $\Delta_1 := \langle e_1, e_2, e_4, e_5 \rangle \xrightarrow{F_{\text{gen}}}$ Variedad asoc. $X_1 = X(\Delta_1)$
 Nota: $e_1 + e_2 + e_4 + 2e_5 = 0$ $\mathbb{P}(1, 1, 1, 2)$

Por 2 Sea $\Delta_2 = \underbrace{\Delta_1}_{\text{chamisco}} \cup \langle e_3 \rangle \xrightarrow{F_{\text{gen}}}$ $X_2 = X(\Delta_2)$
 $X_2 \xrightarrow[e_3]{\text{Contract}} X_1$