Diana Torres : MMP necesita singularidades 23/4/19 (1)

Ejemplo: Sea $A = \mathbb{C}^3/\mathbb{Z}^6$ $i : A \to A$, $x \mapsto -x$.

$A/\langle i \rangle$ tiene puntos singulares para los $x \in A$ tal que $2x = 0$.

Tiene 2^6 puntos fijos por i que serán singulares.

$\mathbb{C}[x,y,z]^{(i)}$, $x_0 := x^2$, $x_1 := y^2$, $x_2 := z^2$, $x_3 := xy$, $x_4 := yz$, $x_5 = zx$

$\mathbb{P}^2 \longrightarrow \mathbb{P}^5$, $[x,y,z] \mapsto [x^2, y^2, z^2, xy, yz, zx]$ superficie de Veronese

$\therefore$ alrededor de $(0,0,0)$, es tomar el $\underbrace{\text{cono de la Veronese}}_{\operatorname{Spec} \mathbb{C}[x,y,z]^{(i)}}$.

$\rightarrow$ $Bl_0(\operatorname{Spec}(\mathbb{C}[x,y,z]^{(i)})) \longrightarrow \operatorname{Spec}(\mathbb{C}[x,y,z]^{(i)})$

$E \simeq \mathbb{P}^2 \longmapsto 0$

$\mathcal{O}_E(E) \simeq \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(-2)$

$\rightarrow$ Sea $f : X \to Y$ la resolución de los 2^6 puntos singulares de $Y := A/\langle i \rangle$ $\Rightarrow K_X = f^*K_Y + \sum_{i=1}^{64} a_i E_i$

$K_{E_i} \sim \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(-3)$ $K_A \sim 0$ $q : A \to A/\langle i \rangle = Y$ $q^*K_Y \sim K_A \sim 0$

$2K_Y \sim q_* q^* K_Y \sim q_* K_A \sim 0$

$K_{E_i} \sim \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(-3)$ $K_{E_i} = K_X + E_i \big|_{E_i} \sim f^*K_Y + \sum a_i E_i + E_i \big|_{E_i}$

$\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(-3) \sim K_{E_i} \sim (a_i + 1) E_i \big|_{E_i} \sim \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}((a_i+1)(-2))$

$\therefore$ $a_i = \frac{3}{2} - 2 \Rightarrow a_i = \frac{1}{2}$.

$K_X \sim \sum_{i=1}^{64} \frac{1}{2} E_i$ (luego Y tiene sing. terminales)

Tenemos que los rayos extremales en X con respecto a K_X son 2^6 líneas $l_i \subset E_i$

$$NE(X) = NE(X)_{K_X \geq 0} + \sum_{i=1}^{64} \mathbb{R}_+[l_i]$$

$$0 > K_X \cdot l_i = \frac{1}{2}\, l_i \cdot E_i = \frac{1}{2} \deg(E_i|_{l_i}) = \frac{1}{2} \cdot -2 = -1 .$$

Y es el modelo minimal de X $\bullet$

Ejemplo II: (Flip) Sea $f: X \to Z$ morfismo birracional propio entre 3-folds tal que el conjunto excepcional de f es una curva $C \subseteq X$ y K_X es negativo en C, supongamos que $f(C) = p$.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, dashed] \arrow[dr, "f"'] & X^+ \arrow[d, "f^*"] \\ & Z \end{tikzcd}$$

$f: X \setminus C \to Z \setminus p$ isomorfismo.
Es fácil ver que K_Z no es $\mathbb{Q}$-Cartier.

Ejemplo: Considere $N = \mathbb{Z}^3$, $\{e_1, e_2, e_3\}$ vect. canónicos $e_4 = (1,1,-2)$
$e_5 = (-1,-1,1)$

Paso 1 $\Delta_1 := \text{Fan}\langle e_1, e_2, e_4, e_5 \rangle \rightsquigarrow$ Variedad asoc. $X_1 := X(\Delta_1)$
Notar $e_1 + e_2 + e_4 + 2e_5 = 0$ $\mathbb{P}(1,1,1,2)$

Paso 2 Sea $\Delta_2 = \underbrace{\Delta_1 \cup \langle e_3 \rangle}_{\text{abanico}} \rightsquigarrow X_2 = X(\Delta_2)$

$$X_2 \xrightarrow[e_3]{\text{Contraer}} X_1$$