Propiedades de Pares

Pedro Montero 30-Abril-19

<u>Recuerdo</u>: X = proy. normal, $\Delta = \sum b_j D_j$, $b_j \in \mathbb{Q}$. tq $K_X + \Delta$ es $\mathbb{Q}$-Cartier y sea $f: Y \to X$ resol. de sing:

$$K_Y + f_*^{-1}\Delta \sim_{\mathbb{Q}} f^*(K_X+\Delta) + \sum_{E\ exc} a(E_i,\Delta) E_i$$

$$\Leftrightarrow K_Y \sim_{\mathbb{Q}} f^*(K_X+\Delta) + \sum_{E_i \text{ div arb.}} a(E_i,\Delta) E_i$$

<u>obs</u>: si E no es excepcional $a(E,\Delta) = \begin{cases} -b_j & \text{si } E = f_*^{-1} D_j \\ 0 & \text{sino} \end{cases}$

<u>Def</u>: $\operatorname{Discrep}(X,\Delta) = \inf\{a(E,\Delta),\ E \text{ div exc para cierto } f: Y \to X\}$

total $\operatorname{discrep}(X,\Delta) = \inf\{a(E,\Delta),\ E \subseteq Y \text{ para cierto } f: Y \to X\}$

Ejemplo: X lisa $\Rightarrow$ $\operatorname{discrep}(X) = 1$.

<u>obs</u>/- (1) $\Delta' \geq 0$ $\mathbb{Q}$-Cartier en X, $a(E,\Delta) \geq a(E,\Delta+\Delta')$
(2) Si X lisa, $\Delta = \sum b_j D_j$, $Z \subseteq X$ subvariedad lisa de codim k, $\sigma: Y = Bl_Z(X) \to X$ con $E = \operatorname{exc}(\sigma)$
$\Rightarrow a(E,\Delta) = k - 1 - \sum b_j \operatorname{mult}_Z(D_j)$.

<u>Prop</u>/- ya sea $\operatorname{discrep}(X,\Delta) = -\infty$
o bien

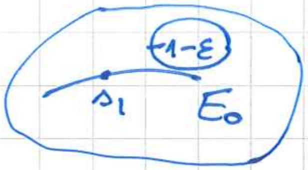
$$-1 \leq \operatorname{totaldiscrep}(X,\Delta) \leq \operatorname{discrep}(X,\Delta) \leq 1.$$

<u>Idea</u>: $\Delta = 0$, $\dim(X) = 2$.

Si $p \notin \mathrm{Sing}(X)$, y $\sigma : Bl_p(X) \to X \Rightarrow \mathrm{discrep}(X) \leq 1$.

Sea $\sigma_0 : Y_0 \to X$ resol. de sing $\mathrm{Exc}(\sigma_0) = E_0$ y sup. que $a(E_0) = -1-\varepsilon$ cierto $\varepsilon > 0$

localmente, cerca de $s := s_1 \in E_0$ gral:

$Y_0 =$ 

$K_{Y_0} \sim_{\mathbb{Q}} \sigma_0^*(K_X) - (1+\varepsilon) E_0$

Sea $\sigma_1 : Y_1 = Bl_{s_1}(Y_0) \to Y_0$, $\mathrm{Exc}(\sigma_1) = E_1$.

y $\sigma_1^*(E_0) = \underbrace{E_0}_{\text{transf. estr.}} + E_1 \Rightarrow K_{Y_1} = \sigma_1^* K_{Y_0} + E_1$

$$\begin{aligned} K_{Y_1} &= \sigma_1^*\left[\sigma_0^* K_X - (1+\varepsilon)E_0\right] + E_1 \\ &= \sigma_1^*\sigma_0^*(K_X) - (1+\varepsilon)E_0 - (1+\varepsilon)E_1 + E_1 \\ &= \sigma_1^*\sigma_0^*(K_X) - (1+\varepsilon)E_0 - \varepsilon E_1 \end{aligned}$$

$\therefore K_{Y_2} = \sigma_2^*\sigma_1^*\sigma_0^*(K_X) - (1+\varepsilon)E_0 - \varepsilon E_1 - 2\varepsilon E_2$

$\therefore$ En $E_n \Rightarrow a(E_n) = -n\varepsilon \xrightarrow[n\to\infty]{} -\infty$ •

<u>obs 2</u>: si X lisa y $\mathrm{Supp}(\Delta)$ SNC y $b_i \leq 1 \ \forall i$

$$\Rightarrow \mathrm{discrep}(X, \Delta) = \min\left\{ \min_{\substack{D_i \cap D_j \neq \emptyset \\ i \neq j}} (1 - b_i - b_j) \, ; \, \min_k (1 - b_k) \, ; \, 1 \right\}$$

Cor: Sea $f: Y \to X$ resol de sing.
$Exc(f) = E_1 \cup \dots \cup E_r$

a) Si $0 \leq \min_i (a(E_i)) \leq 1 \Rightarrow discrep(X) = \min_i a(E_i)$

b) Sea $\Delta = \sum b_j D_j$, $b_j \leq 1$. Si f log-resol. y $\min_i a(E_i, \Delta) \geq -1$

$\Rightarrow discrep(X, \Delta) = \min \{ \min_i a(E_i, \Delta), \min_j (1 - b_j), 1 \}$

Idea: a) $K_Y \sim_{\mathbb{Q}} f^* K_X + \sum a_i E_i$

$\Leftrightarrow K_Y + \Delta_Y \sim_{\mathbb{Q}} f^* K_X$ con $\Delta_Y = -\sum a_i E_i$

Sea $\Delta' = \sum a_i E_i \geq 0 \underset{\text{obs } 1, (1)}{\Longrightarrow} discrep(Y, \Delta_Y) \geq discrep(Y, \underbrace{\Delta_Y + \Delta'}_{=0}) = 1$.

Luego: $discrep(X) = \min \{ \min a(E_i), discrep(Y, \Delta_Y) \}$
$= \min_i a(E_i)$.

b) Usar la obs. 2 ■

Def: El par (X, Δ) tiene sing.:

$$\left\{\begin{array}{l} \text{terminales} \\ \text{canónicas} \\ k\ell t \\ p\ell t \\ d\ell t \\ \ell c \\ \varepsilon - \ell t \\ \varepsilon - \ell c \end{array}\right\} \quad \text{si } a(E, \Delta) \text{ es } \left\{\begin{array}{l} > 0 \quad \forall E \text{ exc} \\ \geq 0 \quad \forall E \text{ exc} \\ > -1 \quad \forall E \text{ div (incluido frontera)} \quad \lfloor \Delta \rfloor \leq 0 \\ > -1 \quad \forall E \text{ exc} \\ > -1 \text{ si } centro_X(E) \subseteq \text{Non SNC} \\ \geq -1 \quad \forall E \text{ exc.} \\ > -1 + \varepsilon \quad \forall E \text{ exc.} \\ \geq -1 + \varepsilon \quad \forall E \text{ exc.} \end{array}\right.$$

Ejemplo: (X,Δ) par tal que $\Delta = \sum b_j D_j$, $b_j \leq 1$
y $K_X+\Delta$ $\mathbb{Q}$-Cartier.

① si $\Delta' \leq \Delta$, $K_X+\Delta'$ $\mathbb{Q}$-Cartier
(X,Δ) lc (klt, ...) $\Rightarrow (X,\Delta')$ lc (klt, ...)

② si (X,Δ) plt (resp. klt) y $(X,\Delta+\Delta')$ lc
$\Rightarrow (X,\Delta+t\Delta')$ plt (resp klt) $\forall t<1$.

Teo. tipo Bertini: Sea (X,Δ) un par y $|H|$ sist lineal sin ptos bases. Sea $H_g \in |H|$ elemento general.

① $\text{discrep}(X,\Delta) \leq \text{discrep}(H_g, \Delta|_{H_g})$

② $\text{discrep}(X,\Delta+H_g) = \min\{0, \text{discrep}(X,\Delta)\}$

Idea: ① Fórmula de adjunción.

② Bertini: $f_*^{-1}(\Delta+H_g)$ SNC si $f: Y\to X$ log resol.
$\Rightarrow f$ es log resol. de $(X,\Delta+H_g)$.

Prop: Sea $g: X\to Y$ morfismo finito entre var. proy. normales y $\Delta_Y = \sum b_j D_j$ $\mathbb{Q}$-div tq $K_Y+\Delta_Y$ $\mathbb{Q}$-Cartier.

Si definimos Δ_X por $K_X+\Delta_X = g^*(K_Y+\Delta_Y)$ (ie
$\Delta_X = g^*\Delta_Y - (K_X - g^*(K_Y))$)

$\Rightarrow$ ① $1+\text{discrep}(Y,\Delta_Y) \leq 1+\text{discrep}(X,\Delta_X)$
$\underset{(*)}{\leq} \deg(g)\,(1+\text{discrep}(Y,\Delta_Y))$

$\Downarrow$

② (X,Δ_X) lc (resp klt) $\Leftrightarrow (Y,\Delta_Y)$ lc (resp. klt).

Idea de (✱): $\Delta_Y = 0$. Veamos (✱):

$$\begin{tikzcd} e' \in E' \subseteq X' \arrow[r, "h"] \arrow[d, "f_X"'] & Y' \supseteq E \arrow[d, "f_Y"] \\ X \arrow[r, "g"] & Y \end{tikzcd}$$

$E' \mapsto E$

r: índice de ramif de $E'/E \leq \deg(g)$.

f_X, f_Y resol. de sing

$K_X = g^* K_Y + \underbrace{\mathrm{Ram}(g)}_{\geq 0}$ $\left[\mathrm{Ram} \equiv 0 \overset{\text{def}}{\iff} g \text{ étale en codim } 1 \right]$

Cerca de e':

$$\begin{aligned} K_{X'} &= f_X^* K_X + a(E')E' \\ &\geq \underbrace{f_X^* g^* K_Y}_{} + a(E')E' \\ &= h^* f_Y^* K_Y + a(E')E' \end{aligned}$$

Pero: $K_{X'} = h^* K_{Y'} + (r-1)E' = h^* f_Y^* K_Y + (a(E)r + r - 1)E'$

$\Rightarrow a(E') = a(E)r + r - 1$

$\iff a(E') + 1 = r(a(E) + 1)$

$a_\ell(E') = r\, a_\ell(E)$ ■

obs/r: Sea $p \in Y$ y suponer que mK_Y Cartier cerca de p.

$\underset{\text{trivializar}}{\Rightarrow}$ $\mathcal{O}_Y(mK_Y) \simeq \mathcal{O}_Y$ cerca de p.

(Beauville p.100) $\exists\, g : X \to Y$ finito étale de grado m.

tq $\mathcal{O}_X(K_X) \simeq \mathcal{O}_X$

$\therefore$ $(p \in Y)$ es klt $\iff$ $(p \in Y) \simeq (q \in X)/G$ $\to$ grupo cíclico (libre en codim 1)

canónica

Sing en superficies:

Prop X = sup. normal proy. Luego

(1) X terminal $\iff$ X es lisa (2) X canónica $\iff$ X du Val.

Idea: Suponer que X tiene a lo más sing. canónicas.
Sea $f: Y \to X$ resol. de sing. minimal.

$\Rightarrow K_Y = f^*(K_X) + \sum a_i E_i \quad a_i \geq 0$

Si $\exists\, i$ con $a_i \neq 0 \Rightarrow \exists\, E_j$, tq $K_Y \cdot E_j < 0$

pues $K_Y \cdot (\sum a_i E_i) = \underbrace{(f^* K_X)(\sum a_j E_j)}_{=0} + \underbrace{(\sum a_j E_j)^2}_{<0}$.

Por otra parte $K_Y \cdot E_j < 0 \underset{E_j^2 < 0 \text{ adj}}{\Longrightarrow} E_j \simeq \mathbb{P}^1$ y $E_j^2 = -1$.

Contr. minimalidad $\Rightarrow K_Y = f^* K_X$ (res. crepante).

Cor: X dim n terminal $\Downarrow$ $\operatorname{codim}_X(\operatorname{Sing}(X)) \geq 3$

Reducción a superficies: 3-fold son aislados

Prop 1: Sea $(p \in X)$ germen sup. normal: Son equiv.:

$(p \in X)$ klt $\Leftrightarrow$ $p \in X$ cociente de $0 \in \mathbb{C}^2$ por la acción grupo finito libre en codim 1.

Dem: mK_X Cartier cerca de p y sea $g: X' \to X$ finito de grado m, étale tq $\mathcal{O}_X(K_{X'}) \simeq \mathcal{O}_{X'}$

① $\Rightarrow$ ② X klt $\Rightarrow$ X' klt

como $K_{X'}$ Cartier y $\underset{\in \mathbb{Z}}{\operatorname{discrep}(X')} > -1 \Rightarrow X'$ sing. Canónicas.

y (por antes seminario) $X' =$ Cociente $0 \in \mathbb{C}^2$ por grupo finito
y $(p \in X)$ también.

② $\Rightarrow$ ① Si $(p \in X) \simeq 0 \in \mathbb{C}^2/G \Rightarrow |G|(\operatorname{discrep}(X)+1) \geq \operatorname{discrep}(\mathbb{C}^2)+1 = 2$

$\Rightarrow (p \in X)$ klt ∎