

# Clasificación combinatorial de l.c. singulares

[lo siguiente es la demostración intuitiva de Alexeev]

Cien  
7-5-19

①  
VIII

→ Trabajemos con el germe de una singularidad normal  $p \in X$   
2-dimensional,  $B = \sum b_i B_i$   
 $[0,1]_{\mathbb{Q}}^2 \leftarrow$  irred. Weil div

Ej. Vimos la vez pasada que  $B = \emptyset$  y  $\text{char } k = 0$  implica  
l.t.  $\Leftrightarrow$  singularidad cociente [Kawamata 84], clasificadas en [Brieskorn 68].  
( $\begin{matrix} \mathbb{C}^2/G \\ \downarrow \\ \mathbb{C}^2/G \\ \downarrow \\ \mathbb{C}^2/G \end{matrix}$ ,  $G \in GL(2, \mathbb{C})$  finito)

Meta: clasificar pares l.c. para  $B = \emptyset$  o  $B = \sum B_i$ .

→ Considera resolución minimal de  $p \in X$ ,  $f: Y \rightarrow X$ . Siempre para una curva  
 $C \subset X$  denotemos por  $f_*^{-1}(C) \subset Y$  la transformación propia.

$$K_Y + \sum f_*^{-1} B_i + \sum E_j = f^*(K_X + \sum B_i) + \sum_{j=1}^n a_j E_j$$

Adyunción:  $2p_a(E_j) = E_j \cdot (K_Y + E_j) + 2 = E_j \cdot (f^*(K_X + B) + \sum_{k \neq j} a_k E_k - \sum_{k \neq j} f_*^{-1} B_i - \sum_{k \neq j} E_k) + 2$

$\Rightarrow 2p_a(E_j) = E_j \cdot (\sum_{k \neq j} a_k E_k - \sum_{k \neq j} f_*^{-1} B_i - \sum_{k \neq j} E_k) + 2$

y así tenemos el sistema (\*)  $\sum_{k=1}^n a_k E_k \cdot E_j = -c_j \Big|_{j=1, \dots, n}$

donde  $c_j = 2 - 2p_a(E_j) - (\sum_{k \neq j} f_*^{-1} B_i + \sum_{k \neq j} E_k) \cdot E_j$ . Equivalentemente:

(\*\*)  $\sum_{k=1}^n (a_k - 1) E_k \cdot E_j = -d_j$

donde  $d_j = 2 - 2p_a(E_j) + E_j^2 - \sum_{k \neq j} f_*^{-1} B_i \cdot E_j$ .

La estrategia es: resolver sistema (\*) para  $a_k$  y verificar condiciones para  $a_k \geq 0$ .

Algunas verdades generales y notaciones

- (\*) admite solución única ya que  $(E_k \cdot E_j)$  es neg. definida.
- El grafo dual con pesos  $\Gamma$  de  $f: Y \rightarrow X$   
 $E_j \leftrightarrow \text{vertex } v_j \quad v_j \xrightarrow{m} v_k \leftrightarrow E_j \cdot E_k = m \quad v_j \leftrightarrow E_j^2 = -n_j$
- Como  $f$  es resol minimal  $\Rightarrow d_j = 2 - 2pa(E_j) + E_j^2 - \sum f_*^{-1}(B_i) E_j \leq 0 \quad \forall j$ .
- Ya que  $E_j^2 < 0$ ,  $E_j \cdot E_k \geq 0$  y  $(E_i \cdot E_j)$  neg. def  $\Rightarrow (E_i \cdot E_j)^{-1}$  tiene coef. negativos.

→ Por 4. tenemos que en (\*\*\*) podriamos pasar:

- $d_j = 0 \quad \forall j$ . Luego  $a_k - 1 = 0 \quad \forall k$ . Esto pasa sólo si  $pa(E_j) = 0$   
 $\forall j$ ,  $E_j^2 = -2$  y  $E_j \cdot \sum f_*^{-1} B_i = 0$ . Luego simplemente tenemos du Val.
- $\exists d_j < 0$  y  $\forall k, a_k < 1$  [Aplicar simplemente 4.].

5. (Lema reducción 3.1.3) Sea  $\Gamma$  grafo con pesos en 2. Sea  $\Gamma' \subset \Gamma$ ,  $\Gamma' \neq \Gamma$  con vértices y uniones y pesos de vértices como en  $\Gamma$ , pesos en uniones y pa vértices  $\leq$  de  $\Gamma$  y  $E_j \cdot \sum f_*^{-1} B_i$  en  $\Gamma' \leq E_j \cdot \sum f_*^{-1} B_i$  en  $\Gamma$ .  
 $\Rightarrow a_k \leq a'_k$  y si  $\Gamma$  no es du Val  $\Rightarrow a_k < a'_k$ .  
 [dem. = comparar sist (\*\*\*) corresp. y usar 4.]

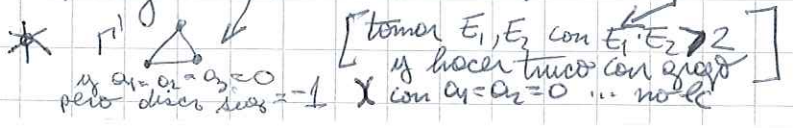
Suponer

(3.1.4)  $\Gamma' = \{v_1\}$ ,  $pa(E_1) = 1 \Rightarrow c_1 = 2 - 2pa(E_1) - 0 = 0$  y  $d_1 = 0$ :  $E_1 = \odot$  o  $E_1 = \ominus$   
 o  $\left\{ \begin{array}{l} \text{peso en el último se obtiene } a_1 = -1 \text{ después de 3 blow-ups [hacer]} \\ \text{y en } \underline{\text{no}} \text{ es l.c.} \end{array} \right.$  [se asume  $E_1 \cdot \sum f_*^{-1} B_i = 0$ ]

(3.1.5)  $\Gamma' = \{v_1, \dots, v_2\}$  ciclo de  $\mathbb{P}^1$ 's. Luego por (\*)  $c_j = 2 - 0 - 2 = 0$  (se asume  $E_1 \cdot \sum f_*^{-1} B_i = 0$ )  $\Rightarrow a_j = 0$ . Se puede verificar que los cruces son normales simples para toda configuración calculando discrep.

1+...+5 ejemplos  $\Rightarrow \Gamma$  de una lc no tiene  $v_j$  con  $pa(E_j) > 1$  o una unión con peso  $> 2$

(\*) Si  $\Gamma \neq \Gamma'$  como en (3.1.4) o (3.1.5)  $\Rightarrow$  todo  $E_j$  es un  $\mathbb{P}^1$ , todos los uniones son simples (peso 1) y  $\Gamma$  es un árbol.



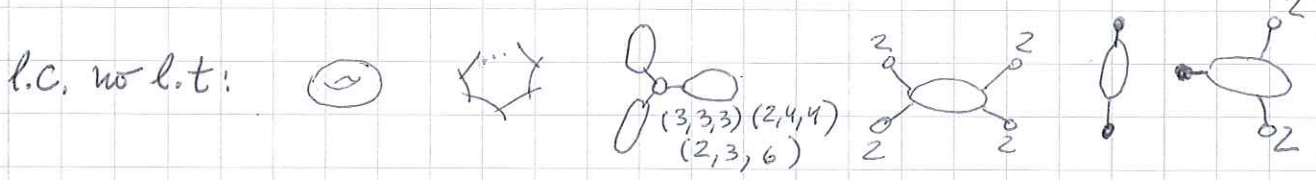
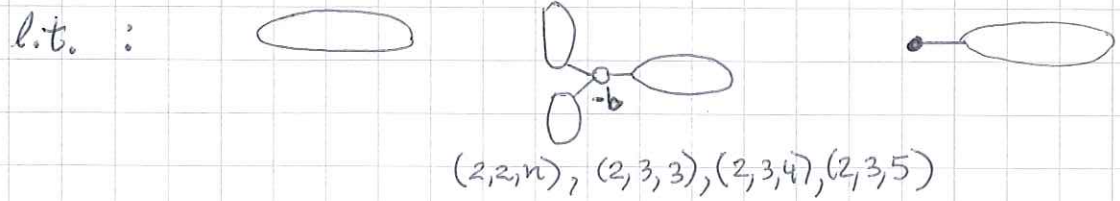
→ Para el teorema zinal, se define para todo  $\Gamma' \subset \Gamma$  el número  $\Delta' = \Delta(\Gamma') = \prod_{E_k, E_j \in \Gamma'} (E_k \cdot E_j)$ .

Si  $\Gamma' = \Gamma_1 \sqcup \Gamma_2 \Rightarrow \Delta' = \Delta_1 \cdot \Delta_2$ ,  $\Delta(\emptyset) = 1$  por definición.

Lema:  $\Gamma$  grafo con uniones simples,  $v \in \Gamma$  de peso  $n$ ,  $v_1, \dots, v_s$  adyacentes a  $v$   
 $\Rightarrow \Delta(\Gamma) = n \Delta(\Gamma - v) - \sum_i \Delta(\Gamma - v - v_i)$ .

$\therefore a_j = \frac{1}{\Delta(\Gamma)} \sum_{k=1}^n \Delta(\Gamma - (v_{j_1} \rightarrow v_k)) \cdot c_k$ ,  $c_k = 2^{-\left(\sum_{i \neq k} B_i + \sum_{l \neq k} E_l\right) E_k}$

+ cuidadoso análisis de los posibles árboles  $\Rightarrow$  la siguiente clasificación:  
 $[f: Y \rightarrow X$  resol. minimal,  $o =$  exc. curva de  $f$ ,  $\bullet =$  rama local de  $B_i$ ,]  
 $\bigcirc =$  ~~el~~ codome de img cálculo  $(\Delta, \alpha)$



Teorema: Sea  $(X, B)$  un par l.c. proyectivo con  $B = \sum b_i B_i$ ,  $b_i \in \mathbb{Q}, \mathbb{Z}$ .  
 $\Rightarrow$  Existen contracciones  $f: S \rightarrow S_1 \rightarrow \dots \rightarrow S_n = S'$  tal que  $(S_i, f_* B)$  (adeuado) es l.c. y se tiene una de las condiciones siguientes para  $(S', f_* B)$ :  
 (1)  $K_{S'} + f_* B$  es neg (2)  $\exists g: S' \rightarrow T$  morfismo  $S'$  hacia resol sobre  $T$  y  $-(K_{S'} + f_* B)$   $g$ -empleado.  
 (3)  $-(K_{S'} + f_* B)$  es empleado (Log del Pezzo)

Para detalles del proceso, los cuales son muy relevantes en la práctica, mirar "Birational geometry of log Surfaces" Kollár-Kovács.

Por ejemplo, ellos demuestran:

(4)

Lema 2.3.5:  $(S, B)$  l.c. superficie y  $C \subset S$  curva meducible con  $C^2 < 0$   
y  $C \cdot (K_S + B) < 0$ . Entonces  $C \cong \mathbb{P}^1$  y puede ser contraído a un pt por.  
[serva la contracción de un rango extremal para  $K_S + B + \epsilon H$  Echio, Hample]

Lema 2.3.4:  $g: S' \rightarrow T$  como en el caso (2) del teorema arriba. Entonces:

(1) fibra general es  $\mathbb{P}^1$  (2) toda fibra es meducible.

Por otro lado, mirar el MMP relativo para una  $W$ -superficie en el siguiente recuadro.

94 W-surfaces and big picture.

Def: A W-surface is  $Y = \text{normal proj. sur}$  with only Wahl singularities together with proper deformation  $(Y \subset Y_t) \rightarrow (0 \in \mathbb{D})$  s.t.

- (1)  $X$  3-fold normal  $K_X \cong \mathbb{Q}$ -lattice
- (2)  $X_0$  isomorph a  $Y$ , reducible.
- (3)  $X_t$  no singular for  $t \neq 0$ .

	W-surface (non classic)	surface (classic)
	intersection theory $\mathbb{1D}$	intersection theory
$K^2, e, \chi, q, pg$	constant standard invariants	invariants
	MMP	MMP
	<div style="display: flex; justify-content: space-around;"> <div style="text-align: center;"> <p>Flip</p> <p>blow down &amp; up</p> <p><math>X_0</math></p> </div> <div style="text-align: center;"> <p>div. contr.</p> <p>blow down to Wahl</p> <p><math>X_t</math></p> </div> </div>	contraction of $(-1)$ -curves
	MMP result	MMP result
	ruled or	ruled or
	<div style="display: flex; justify-content: space-between;"> <div style="text-align: center;"> <p>MHP <math>\sim \mathbb{P}^2</math> or smooth deg. of <math>\mathbb{P}_c(\mathbb{E})</math></p> </div> <div style="text-align: center;"> <p>unique MM</p> </div> </div>	<div style="display: flex; justify-content: space-between;"> <div style="text-align: center;"> <p><math>\mathbb{P}^2</math> or <math>\mathbb{P}_c(\mathbb{E})</math></p> </div> <div style="text-align: center;"> <p>unique MM</p> </div> </div>
	$K$ neg & $K^2 > 0$	$K$ neg & $K^2 > 0$
	$\Rightarrow$ unique conical model with only T-singularities	$\Rightarrow$ unique conical model with only ADE singularities

★ It turns out that in our case we are ruled and we will end up in a smooth W-surface. So we will need  $(-1)$ -curves and identifiy.