Adjunción (Diana Torres) 14/5/19 ①

VIII

Recordemos que (X,D) tiene sing klt, lc, etc...

Ejl.- Sea $X \subset \mathbb{P}^{n+1}$ cono 2 dim proy. sobre una curva racional normal $C \subseteq \mathbb{P}^n$.

$X = \text{cono}(C)$, $Cl(X) \simeq Cl(C) \simeq \mathbb{Z}$, $Cl(X) = \mathbb{Z}L$ $(L \simeq \mathbb{P}^1)$

$$H|_X \sim nL, \quad L|_L \sim \frac{1}{n}P, \ P \text{ punto}.$$

$$K_X + L|_L - K_L = -(n+2)L + L|_L + 2P = \left(1-\frac{1}{n}\right)P.$$

[Prop-Def] Sea X variedad normal, $S \leq X$ subvariedad. Suponga que $K_X + S$ es l.c. en codim 2. Entonces existe un divisor efectivo $\mathbb{Q}$-Weil $\mathrm{Diff}_S(0)$, llamado "Diferente", tal que

$$K_X + S|_S = K_S + \mathrm{Diff}_S(0)$$

Sea B $\mathbb{Q}$-Cartier, el diferente para K_X+S+B,

$$K_X + S + B|_S = K_S + \mathrm{Diff}_S(B).$$

[Teor 22.4] Sea $C \subseteq X$ una curva tal que $K_X + C$ es plt $\Rightarrow$ $\mathrm{Diff}_C(0)$ en p tenemos $\mathrm{Diff}_C(0) = \left(1 - \frac{1}{m}\right)P$, donde n es el índice de $K_X + C$ en p

Idea: $f : \tilde{X} \to X$ resol. ~~min~~ log de p.

$$K_{\tilde{X}} + f^{-1}(C) + \sum E_i = f^*(K_X + C) + \sum a_i E_i$$

con $a_i > 0$, $f^{-1}(C)$, E_i no sing

$$f^{-1}C \cdot E_1 = E_1 \cdot E_2 = \dots = E_{n-1}E_n = 1$$

y $f^{-1}C \cdot E_j = 0$ si $j \neq 1$, $E_i E_j = 0$ si $(i<j, j \neq i+1)$ } uso clasi.

~~$f_*^{-1}C \cdot E_1 \ldots a_1$~~ luego hacer el sist. de ecuaciones

$a_i = b_i\, a_1$ donde $m = -k_{n-1} - k_n E_n^2 \quad (k_1 = 1)$

$a_1 = \dfrac{1}{m}$

Pero $K_X + f_*^{-1}C\big|_{f_*^{-1}C} - K_{f_*^{-1}C} = \Sigma(1-a_i)E_i\big|_{f_*^{-1}C} = \left(1 - \dfrac{1}{m}\right)$ ∎

[Teorema 2.2.6] Sea B un divisor $\mathbb{Q}$-efectivo en X tal que S y B no tienen componentes en común y $\lfloor B \rfloor = 0$. Supongo que $K_X + S + B$ es $\mathbb{Q}$-Cartier $\Rightarrow$ $K_X + S + B$ es plt cerca de S $\Leftrightarrow$ S es normal y $K_S + \mathrm{Diff}_S(B)$ es klt.

Ejl.- $X = \mathbb{C}^2$, $S = \{x = 0\}$, $B_1 = \{y = x^2\}$, $B_2 = \{y = 2x^2\}$
$B_3 = \{y = x\}$

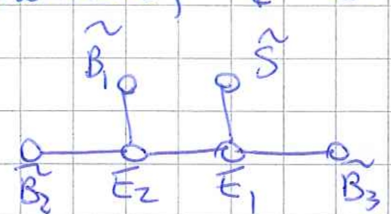
$$B = bB_1 + bB_2 + \left(\tfrac{3}{2} - 3b\right) B_3 \quad \text{donde } \tfrac{1}{2} < b < 1.$$

Sabemos que $K_{\mathbb{C}^2} + S + B\big|_S = K_S + \mathrm{Diff}_S(B)$

$\mathrm{Diff}_S(B) \sim S + B\big|_S \sim B\big|_S \sim \left(b + b + \tfrac{3}{2} - 3b\right)P \sim \left(\tfrac{3}{2} - b\right)P.$

es klt

y, por otro lado, $K_{\mathbb{C}^2} + S + B$ no es l.c.



$a(E_2, S + B) = -\tfrac{1}{2} - b < -1.$
not plt.