Seminario de Geometría Birracional (PUC, 2019–1)

Acotamiento de superficies de Del Pezzo

Pedro Montero
Universidad Técnica Federico Santa María
pedro.montero@usm.cl

Todas las variedades será definidas sobre un cuerpo algebraicamente cerrado de característica cero.

1. Superficies de Del Pezzo lisas

Definición 1.1. Sea X una variedad algebraica proyectiva normal. Diremos que X es una **variedad de Fano** si el divisor anticanónico $-K_X$ es $\mathbb{Q}$–amplio, es decir, si existe $m \in \mathbb{N}^{\geq 1}$ tal que $-mK_X$ es un divisor de Cartier amplio. Si $\dim X = 2$ y X es Fano, diremos que X es una **superficie de Del Pezzo**.

Proposición 1.2. *Sea X una superficie de Del Pezzo lisa. Entonces X es isomorfa al blow-up de $\mathbb{P}^2$ en r puntos, con $0 \leq r \leq 8$, o bien $X \cong \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$.*

Demostración. Sea X una superficie de Del Pezzo lisa. Si X no es minimal (es decir, si existe una curva excepcional $E \subseteq X$ tal que $E \cong \mathbb{P}^1$ y $E^2 = -1$) entonces el teorema de contracción de Castelnuovo asegura la existencia de un único morfismo $\varphi : X \to Y$ con fibras conexas de tal suerte que $\operatorname{Exc}(\varphi) = E$, $\varphi(E)$ es un punto en Y, y además Y es una superficie lisa. Por ende, tenemos que

$$K_X = \varphi^* K_Y + E.$$

En particular, observamos que $-K_Y$ es amplio. En efecto, dado que $-K_X$ es amplio, la fórmula de proyección (ver Observación 3.8) implica

$$(-K_Y)^2 = K_Y^2 = (\varphi^* K_Y)^2 = (K_X - E)^2 = K_X^2 - 2K_X \cdot E + E^2 = K_X^2 - 2 \cdot (-1) - 1 = K_X^2 + 1 > 0.$$

Además, si $C \subseteq X$ es una curva irreducible diferente de E, entonces se tiene por la fórmula de proyección que

$$(-K_Y) \cdot \varphi_* C = \varphi^*(-K_Y) \cdot C = (-K_X + E) \cdot C = -K_X \cdot C + E \cdot C > 0.$$

Concluimos así que $-K_Y$ es amplio gracias al criterio de Nakai-Moishezon. Luego, basta estudiar superficies de Del Pezzo minimales:

Sea X una superficie de Del Pezzo minimal. Observamos que $P_2(X) = \dim \mathrm{H}^0(X, 2K_X) = 0$. En efecto, si D es un divisor efectivo linealmente equivalente a $2K_X$ entonces por una parte $-K_X \cdot D > 0$ (Nakai-Moishezon), pero por otro lado $-K_X \cdot D = -2K_X^2 < 0$, una contradicción. Del mismo modo, la irregularidad $q(X) = \dim \mathrm{H}^1(X, \mathcal{O}_X) = 0$ gracias al teorema de anulación de Kodaira. Así, el criterio de racionalidad de Castelnuovo implica que X es una superficie racional minimal. Luego, X es isomorfa al plano $\mathbb{P}^2$ o bien a una superficie de Hirzebruch $\mathbb{F}_n = \mathbb{P}(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1} \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(n))$ con $n \neq 1$. En el segundo caso, sabemos que la superficie $X \cong \mathbb{F}_n$ posee una curva S_n (única si $n > 0$) con $S_n \cong \mathbb{P}^1$ y $S_n^2 = -n$, luego la fórmula de género $2g(S_n) - 2 = S_n^2 + K_X \cdot S_n$ se reduce a $-K_X \cdot S_n = 2 - n$ por lo cual necesariamente $n = 0$ y por ende $X \cong \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$.

Finalmente, notamos que el blow-up de $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ en un punto es isomorfo al blow-up de $\mathbb{P}^2$ en dos puntos (considerar la proyección estereográfica de la cuádrica lisa $Q \cong \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \subseteq \mathbb{P}^3$ hacia $\mathbb{P}^2$), por lo que toda superficie de Del Pezzo X no-minimal se obtiene como el blow-up de $\mathbb{P}^2$ en r puntos. Calculamos del mismo modo que antes

$$9 = (-K_{\mathbb{P}^2})^2 = (-K_X)^2 + r$$

y por ende $0 \leq r \leq 8$. $\square$

Observación 1.3. No todo blow-up de $0 \leq r \leq 8$ puntos en $\mathbb{P}^2$ es una superficie de Del Pezzo. Por ejemplo, si $\sigma : X \to \mathbb{P}^2$ es el blow-up de 3 puntos p_1, p_2, p_3 en una recta $L \subseteq \mathbb{P}^2$ y $\Gamma \subseteq X$ es su transformada estricta, entonces

$$-K_X \cdot \Gamma = 3 \deg(L) - \sum_{i=1}^{3} \operatorname{mult}_{p_i}(L) = 0,$$

por lo que $-K_X$ no es amplio. En general, basta que los puntos $p_1, \ldots, p_r$ estén el posición general para que $-K_X$ sea amplio (ver [Man86, §24] para más detalles).

2. Variedades de Fano lisas

Observamos, gracias a la demostración de la Proposición 1.2, que el hecho que las superficies de Del Pezzo formen una familia acotada es consecuencia del acotamiento del "volumen"$(-K_X)^2$. En esta sección discutiremos sobre el resultado de acotamiento de variedades de Fano lisas probado por Kollár, Miyaoka y Mori en [KMM92].

Definición 2.1. Sea $\mathcal{F}_n$ un conjunto de (clases de isomorfismo de) variedades proyectivas de dimensión n. Diremos que $\mathcal{F}_n$ es una **familia acotada** si existe $\mathfrak{X} \to S$ un morfismo proyectivo entre esquemas de tipo finito tal que para toda variedad $X \in \mathcal{F}_n$ existe un punto cerrado $s \in S$ tal que $X \cong \mathfrak{X}_s$ (fibra en $s \in S$). En particular, existe $\mathcal{L}$ fibrado en rectas en $\mathfrak{X}$ relativamente muy amplio tal que el divisor amplio $H_s := \mathcal{L}|_{X_s}$ tiene volumen H_s^n uniformemente acotado por una constante $M > 0$ independiente de $s \in S$.

El lema siguiente prueba que el acotamiento uniforme del volumen permite asegurar el acotamiento.

Lema 2.2. *Sea $\mathcal{F}_n$ un conjunto de (clases de isomorfismo de) variedades proyectivas de dimensión n. Supongamos que para toda variedad $X \in \mathcal{F}_n$ existe un divisor H muy amplio en X tal que $H^n \leq M$ para cierta constante $M = M(\mathcal{F}_n) > 0$ independiente de X. Entonces $\mathcal{F}_n$ es una familia acotada.*

Demostración. Podemos usar H para embeber X dentro de un espacio proyectivo $\mathbb{P}^N$ como una subvariedad de grado $\deg_{\mathbb{P}^N}(X) = H^n \leq M$. Por otro lado, sabemos que $\deg X \geq \operatorname{codim} X + 1 = N - n + 1$ y por ende $N \leq n + M - 1$. Finalmente,

$$\mathcal{F}_n \subseteq \{\text{subvariedades de grado} \leq M \text{ en } \mathbb{P}^N, \text{ donde } N \leq n + M - 1\}$$

es una familia acotada. $\square$

El resultado principal de esta sección es

Teorema 2.3 (Kollár–Miyaoka–Mori)**.** *Sea $n \in \mathbb{N}^{\geq 1}$. Entonces la familia*

$$\mathcal{F}_n = \{X \textit{ variedad de Fano lisa de dimensión } n\}$$

es acotada.

Un ingrediente esencial para probar el resultado anterior es el acotamiento del volumen.

Proposición 2.4. *Sea $n \in \mathbb{N}^{\geq 1}$. Entonces existe una constante $M = M(n) > 0$ tal que si X es una variedad de Fano lisa de dimensión n entonces*

$$(-K_X)^n \leq M.$$

Demostración del Teorema 2.3. Dado que $-K_X$ es amplio y X es una variedad lisa, el teorema grande de Matsusaka implica que existe un entero $r = r(n) \in \mathbb{N}^{\geq 1}$ independiente de X tal que el divisor $H = -rK_X$ es muy amplio[1]. En particular, la Proposición 2.4 implica que $H^n = r^n(-K_X)^n \leq r^n M$. Concluimos gracias al Lema 2.2 que $\mathcal{F}_n$ es una familia acotada. $\square$

El siguiente resultado (ver [KMM92, Theorem 4.3]) es la principal herramienta para probar el acotamiento uniforme del volumen. No daremos la demostración, la cual está basada en la teoría de deformación de curvas racionales contenidas en variedades de Fano.

Proposición 2.5. *Sea $n \in \mathbb{N}^{\geq 1}$. Entonces existe una constante $N = N(n) > 0$ tal que para toda variedad de Fano lisa X de dimensión n y para todo par de puntos generales $x, y \in X$ podemos hallar una curva irreducible $C \subseteq X$ tal que $x, y \in C$ y además $-K_X \cdot C \leq N$.*

Finalmente, probemos que el acotamiento del volumen es consecuencia de la Proposición 2.5.

[1] La **conjetura de Fujita** predice que si L es un divisor amplio en una variedad lisa X de dimensión n entonces $K_X + (n+2)L$ es muy amplio. En particular, predice que en una variedad de Fano lisa de dimensión n el divisor $-(n+1)K_X$ es muy amplio.

Demostración de la Proposición 2.4. Sea $x \in X$. El teorema de Riemann-Roch (asintótico) implica que el espacio de secciones globales de $-mK_X$ que se anulan con orden $\geq k+1$ en $x \in X$ verifica

$$\dim \mathrm{H}^0(X, \mathcal{O}_X(-mK_X) \otimes \mathcal{I}_x^{k+1}) = \frac{m^n}{n!}(-K_X)^n + O(m^{n-1}) - \frac{k^n}{n!} + O(k^{n-1}).$$

Escogemos $k = mN$, donde $N = N(d)$ es la constante dada por la Proposición 2.5. Si suponemos por contradicción que existe una variedad de Fano X tal que $(-K_X)^n > N^n$ entonces

$$\dim \mathrm{H}^0(X, \mathcal{O}_X(-mK_X) \otimes \mathcal{I}_x^{k+1}) = \frac{m^n}{n!}((-K_X)^n - N^n) + O(m^{n-1})$$

es de dimensión positiva para $m \gg 0$, en cuyo caso existe un divisor efectivo D tal que $D \sim -mK_X$ y $\operatorname{mult}_x D \geq k+1$. Si escogemos dos puntos generales $x, y \in X$, la Proposición 2.5 permite hallar una curva irreducible C tal que $x, y \in C \not\subseteq D$ y $-K_X \cdot C \leq N$. Sin embargo,

$$D \cdot C \geq \operatorname{mult}_x D \geq k+1 = mN+1$$

contradice el hecho que $D \cdot C = -mK_X \cdot C \leq mN$. □

3. Volumen de superficies de Del Pezzo singulares

Definición 3.1. Sea X una superficie proyectiva normal y sea Δ un $\mathbb{R}$–divisor de Weil en X con coeficientes en el intervalo $[0,1]$ tal que $K_X + \Delta$ es $\mathbb{R}$–Cartier. Diremos que que el par (X, Δ) es una superficie:

(1) **weak log Del Pezzo** si $-(K_X + \Delta)$ es big y nef.

(2) **log Del Pezzo** si $-(K_X + \Delta)$ es amplio.

Sea $f : Y \to X$ una log–resolución del par (X, Δ). Si escribimos

$$K_Y = f^*(K_X + \Delta) + \sum a_i F_i$$

donde los $F_i \subseteq X$ son divisores primos. Dado $\varepsilon \in]0,1]$, diremos que el par (X, Δ) es

(a) ε–**klt** si $a_i > -1 + \varepsilon$ para todo i.

(b) ε–**lc** si $a_i \geq -1 + \varepsilon$ para todo i.

En 1994, Alexeev demostró en [Ale94] el siguiente resultado de acotamiento en dimensión 2 (generalizado por Birkar [Bir16] a dimensión arbitraria).

Teorema 3.2 (Alexeev)**.** *Sea $\varepsilon \in]0,1]$. Entonces la familia*

$$\mathcal{F}_2(\varepsilon) = \{(X, \Delta) \textit{ superficie log Del Pezzo } \varepsilon\text{–lc}\}$$

es acotada.

Una consecuencia directa del resultado anterior es el acotamiento del volumen $(K_X + \Delta)^2$. Cabe destacar sin embargo que el acotamiento de $\mathcal{F}_2(\varepsilon)$ **no** es consecuencia del acotamiento del volumen, pues en principio $(K_X + \Delta)^2 \in \mathbb{R}^{>0}$ es un número real positivo y no necesariamente un entero.

El objetivo de esta sección es probar el siguiente resultado de Jiang [Jia13] sobre el **acotamiento efectivo del volumen**.

Teorema 3.3 (Jiang)**.** *Sea (X, Δ) una superficie weak log Del Pezzo ε–lc. Entonces*

$$(K_X + \Delta)^2 \leq \text{máx}\left\{9, \lfloor 2/\varepsilon \rfloor + 4 + \frac{4}{\lfloor 2/\varepsilon \rfloor}\right\},$$

donde $\lfloor x \rfloor = \text{máx}\{k \in \mathbb{Z} \mid k \leq x\}$ es la función suelo. Más aún, tenemos una igualdad si y sólo si

(1) $\varepsilon > \frac{2}{5}$ y $(X, \Delta) = (\mathbb{P}^2, 0)$; o bien

(2) $\varepsilon \leq \frac{1}{2}$ y (X, Δ) es $(\mathbb{F}_n, \left(1 - \frac{2}{n}\right) S_n)$ o $(\mathrm{PC}_n, 0)$, donde $n = \lfloor 2/\varepsilon \rfloor$ y PC_n es el cono proyectivo sobre una curva racional normal de grado n.

3.1. Resoluciones minimales

Recordemos el siguiente resultado usualmente llamado **lema de negatividad**[2] (ver por ejemplo [KM98, Lemma 3.39]).

Lema 3.4 (Lema de negatividad). *Sea $\pi : X \to Y$ un morfismo birracional entre variedades proyectivas normales y sea B un $\mathbb{R}$–divisor de Cartier en X. Supongamos que $-B$ es π–nef (i.e., $-B \cdot C \geq 0$ para toda curva irreducible $C \subseteq X$ tal que $\pi(C) = \{punto\}$). Entonces, B es efectivo si y sólo si $\pi_* B$ es efectivo. En particular, todo $\mathbb{R}$–divisor de Cartier en X que es π–excepcional y π–numéricamente trivial es cero.*

Corolario 3.5. *Sea $\pi : X \to Y$ un morfismo birracional entre variedades proyectivas normales, si $D = \sum b_j E_j$ es suma de divisores π–excepcionales y D es π–nef, entonces $-D$ es efectivo (i.e., $b_j \leq 0$).*

Demostración. Sea $-B = D$ divisor π–nef. Como $\pi_* B = \pi_*(-D) = 0$ pues D es suma de divisores excepcionales, tenemos que $B = -D$ es efectivo gracias al lema de negatividad. □

La resolución minimal de pares en superficies es un caso particular del **blow-up terminal** introducido por Kawamata en [Kaw92, theorem 5].

Proposición 3.6 (Kawamata). *Sea (X, Δ) un par klt de dimensión ≤ 3. Entonces, existe un par (Y, Δ_Y) y un morfismo birracional $\sigma : Y \to X$ tal que:*

(1) Y es $\mathbb{Q}$–factorial y Δ_Y es un divisor efectivo en Y.

(2) $K_Y + \Delta_Y = \sigma^*(K_X + \Delta)$ y $\sigma_* \Delta_Y = \Delta$.

(3) (Y, Δ_Y) es terminal. En particular, $(Y, 0)$ es terminal.

Diremos que $\sigma : (Y, \Delta_Y) \to (X, \Delta)$ es un **blow-up terminal** *del par (X, Δ). Dos blow-ups terminales son isomorfos en codimensión 1.*

Demostración. Sea $f : V_0 \to X$ una log-resolución de (X, Δ). Dado que (X, Δ) es un par klt, tenemos que
$$K_{V_0} = f^*(K_X + \Delta) + \sum_j a_j F_j$$
donde $a_j = a(F_j, \Delta) > -1$ para todo j. Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que los F_j tales que $a_j < 0$ son disjuntos. Sea $\Delta_0 = \sum_{a_j<0} |a_j| F_j$ y observemos que $f_* \Delta_0 = \Delta$ (pues si F no es excepcional entonces $a(F, \Delta) = -\operatorname{mult}_{f_*F} \Delta \leq 0$). Notemos además que el par (V_0, Δ_0) es terminal.
Al aplicar el Minimal Model Program relativo a X al par (V_0, Δ_0) obtenemos una secuencia finita
$$(V_0, \Delta_0) \dashrightarrow (V_1, \Delta_1) \dashrightarrow \ldots \dashrightarrow (V_m, \Delta_m),$$
donde cada par (V_i, Δ_i) es $\mathbb{Q}$–factorial terminal y cada V_i está dotado de $f_i : V_i \to X$ morfismo birracional. Observemos que si $\varphi : V_i \to V_{i+1}$ es una contracción divisorial $(K_{V_i} + \Delta_i)$–negativa y E es un divisor excepcional de φ, entonces $a(E, \Delta) > 0$ y por ende E no está contenido en el soporte de Δ_i. Finalmente, tenemos que $K_{V_m} + \Delta_m$ es f_m–nef y luego $K_{V_m} + \Delta_m = f_m^*(K_X + \Delta)$ gracias al lema de negatividad. En efecto, si escribimos $K_{V_m} + \Delta_m = f_m^*(K_X + \Delta) + \sum b_j E_j$ con E_j divisor f_m–excepcional y $b_j \geq 0$ (por la elección de Δ_0), entonces $D = \sum b_j E_j$ es f_m–nef y luego el Corolario 3.5 implica que $b_j \leq 0$ y por ende $K_{V_m} + \Delta_m = f_m^*(K_X + \Delta)$. Tomar $(Y, \Delta_Y) = (V_m, \Delta_m)$ y $\sigma = f_m$. □

Corolario 3.7. *Sea (X, Δ) un par klt de dimensión 2. Entonces existe un único par $(X_{\text{mín}}, \Delta_{\text{mín}})$ donde $X_{\text{mín}}$ es una superficie lisa, $\Delta_{\text{mín}}$ es un $\mathbb{R}$–divisor efectivo y tal que existe un morfismo birracional $\pi : X_{\text{mín}} \to X$ de tal suerte que*
$$K_{X_{\text{mín}}} + \Delta_{\text{mín}} = \pi^*(K_X + \Delta).$$

[2]El Corolario 3.5 se puede demostrar fácilmente en el caso de superficies: si escribimos $D = A - B$ donde A y B son divisores efectivos sin componentes en común, entonces como D es π–nef tenemos que $D \cdot A = A^2 - AB \geq 0$. Por otra parte, $A^2 \leq 0$ y $A \cdot B \geq 0$, por lo que $A^2 - A \cdot B \leq 0$. Esto implica que $A = 0$ y luego $-D = B$ es efectivo.

Observación 3.8. Recordemos que un divisor de Cartier D en una variedad proyectiva normal X es nef si $D \cdot C \geq 0$ para toda curva irreducible $C \subseteq X$. Si $f : Y \to X$ es un morfismo propio (e.g. Y proyectiva) entonces la fórmula de proyección

$$f^* D \cdot C = D \cdot f_* C$$

implica que $f^* D$ es un divisor nef en Y. Más aún, la fórmula de Riemann-Roch (asintótica) implica que si D es un divisor nef, entonces D es un divisor big si y sólo si $D^{\dim X} > 0$. Además, si $f : Y \to X$ es un morfismo birracional (en particular, $\dim X = \dim Y = n$) entonces la fórmula de proyección

$$(f^* D)^n = D^n$$

implica que $f^* D$ es un divisor big y nef si y sólo si D es big y nef.

Una consecuencia inmediata del Corolario 3.7 y la Observación 3.8 es que si (X, Δ) es una superficie weak log Del Pezzo ε–lc y $\pi : (X_{\text{mín}}, \Delta_{\text{mín}}) \to (X, \Delta)$ su resolución minimal, entonces el hecho que $K_{X_{\text{mín}}} + \Delta_{\text{mín}} = \pi^*(K_X + \Delta)$ implica que $(X_{\text{mín}}, \Delta_{\text{mín}})$ es una superficie weak log Del Pezzo, donde los coeficientes de $\Delta_{\text{mín}}$ pertenecen al intervalo $[0, 1 - \varepsilon]$ y además

$$\operatorname{vol}(-(K_{X_{\text{mín}}} + \Delta_{\text{mín}})) = (K_{X_{\text{mín}}} + \Delta_{\text{mín}})^2 = (K_X + \Delta)^2 = \operatorname{vol}(-(K_X + \Delta)).$$

Conclusión: Reemplazando (X, Δ) por $(X_{\text{mín}}, \Delta_{\text{mín}})$, podemos suponer que X es lisa, los coeficientes de Δ pertenecen al intervalo $[0, 1 - \varepsilon]$ y $-(K_X + \Delta)$ es big y nef.

3.2. Superficies de Hirzebruch y conos proyectivos

En esta sección recordamos algunas propiedades de las superficies de Hirzebruch y los conos proyectivos de curvas racionales normales (c.f. [Bea96, Chapter III]).

Sea $n \in \mathbb{N}$. Tal como mencionamos anteriormente en la demostración de la Proposición 1.2, la superficie de Hirzebruch $\mathbb{F}_n = \mathbb{P}(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1} \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(n))$ posee una curva irreducible $S_n \subseteq \mathbb{F}_n$ tal que $S_n \cong \mathbb{P}^1$ y $S_n^2 = -n$, la cual es única si $n > 0$. Recordemos que el grupo de Picard de $\mathbb{F}_n$ es de la forma

$$\operatorname{Pic}(\mathbb{F}_n) = \mathbb{Z}h \oplus \mathbb{Z}f,$$

donde f es la clase de una fibra $F \cong \mathbb{P}^1$ de la proyección $\mathbb{F}_n \to \mathbb{P}^1$ y h es la clase de un divisor representando al fibrado en recta tautológico $\mathcal{O}_{\mathbb{F}_n}(1)$. Mas aún, calculamos $f^2 = 0,\ f \cdot h = 1,\ h^2 = n$ y $S_n \equiv h - nf$. Generalmente denotaremos por F_p a la fibra de la proyección $\mathbb{F}_n \to \mathbb{P}^1$ que pasa por un punto dado $p \in \mathbb{F}_n$.

El siguient lema permite modificar el centro del blow-up de superficies de Hirzebruch.

Lema 3.9. *El blow-up de $\mathbb{F}_n$ en un punto de S_n es isomorfo al blow-up de $\mathbb{F}_{n+1}$ en un punto que no pertenece a S_{n+1}.*

Demostración. Sea X el blow-up de $\mathbb{F}_n$ en $p \in S_n$. La transformada estricta de la fibra F_p que pasa por $p \in \mathbb{F}_n$ es una curva (-1) y la transformada estricta de S_n es una curva irreducible de autointersección $-(n+1)$, dichas curvas son disjuntas en X. Al contraer la transformada estricta de F_p en X obtenemos una superficie isomorfa a $\mathbb{F}_{n+1}$. Observamos que la imagen de la transformada estricta de S_n coincide con S_{n+1}, la cual es por ende disjunta del centro del blow-up. □

Sea $n \geq 2$. Recordemos que el cono proyectivo $\mathrm{PC}_n \subseteq \mathbb{P}^{n+1}$ sobre una curva racional normal de grado n es el cono proyectivo sobre la curva de grado n en $\mathbb{P}^n$ dada por la imagen de la aplicación de Veronese de grado n

$$\begin{aligned} \nu_n : \mathbb{P}^1 &\longrightarrow \mathbb{P}^n \\ [x, y] &\longmapsto [x^n, x^{n-1}y, \ldots, xy^{n-1}, y^n] \end{aligned}$$

Sea $O \in \mathrm{PC}_n$ el único punto singular de PC_n, i.e., el vértice del cono proyectivo. Al hacer el blow-up de PC_n en O obtenemos un morfismo birracional (resolución de singularidades) $\varphi : \mathbb{F}_n \to \mathrm{PC}_n$ tal que

$$K_{\mathbb{F}_n} + \left(1 - \frac{2}{n}\right) S_n = \varphi^* K_{\mathrm{PC}_n}.$$

Así, la resolución minimal del par $(\mathrm{PC}_n, 0)$ es $(\mathbb{F}_n, \left(1-\frac{2}{n}\right) S_n)$. Verificamos además que PC_n es $\mathbb{Q}$–factorial, de número de Picard 1, y que $-K_{\mathrm{PC}_n}$ es (muy) amplio.

Terminemos esta sección probando el siguiente resultado que caracteriza pares cuya resolución minimal es como en el caso anterior.

Proposición 3.10. *Sea (X, Δ) una superficie weak log Del Pezzo ε–lc.*

(1) Si la resolución minimal de (X, Δ) es $(\mathbb{F}_n, \left(1-\frac{2}{n}\right) S_n)$ con $n \geq 2$, entonces

$$(X, \Delta) \cong (\mathbb{F}_n, \left(1-\frac{2}{n}\right) S_n) \text{ o bien } (X, \Delta) \cong (\mathrm{PC}_n, 0).$$

(2) Si la resolución minimal de (X, Δ) es $(\mathbb{P}^2, 0)$ entonces

$$(X, \Delta) \cong (\mathbb{P}^2, 0).$$

Para probar la Proposición anterior necesitaremos dos resultados generales. El primero es la versión logarítmica del teorema sin puntos de base (base point free theorem)[3].

Teorema 3.11. *Sea (X, Δ) un par klt $\mathbb{Q}$–factorial proyectivo, donde Δ es un $\mathbb{R}$–divisor. Sea D un $\mathbb{R}$-divisor de Cartier nef tal que $aD-(K_X+\Delta)$ es big y nef para cierto $a \in \mathbb{R}^{>0}$. Entonces D es semi-amplio, es decir, $|mD|$ no posee puntos de base para $m \gg 0$ suficientemente divisible.*

El segundo resultado relaciona modelos semi-amplios y modelos amplios, introducidos en [BCHM10] por Birkar, Cascini, Hacon y McKernan [4].

Definición 3.12. Sea X una variedad proyectiva normal y D un $\mathbb{R}$–divisor de Cartier en X. Sea $f : X \dashrightarrow Y$ una contracción birracional a una variedad proyectiva normal tal que $D_Y = f_*D$ es un $\mathbb{R}$–divisor de Cartier.

(1) Diremos que f es D–**no-negativa** si existe una resolución común de singularidades $p : W \to X$ y $q : W \to Y$ tal que
$$p^*D = q^*D_Y + E,$$
donde E es un divisor efectivo q–excepcional.

(2) Diremos que f es un **modelo semi-amplio** de D si f es D–no-negativa y $D_Y = f_*D$ es semi-amplio en Y.

(3) Diremos que f es un **modelo amplio** de D si f es un modelo semi-amplio de D y $D_Y = f_*D$ es amplio en Y.

Teorema 3.13 (Birkar, Cascini, Hacon, McKernan)**.** *Sea X una variedad proyectiva normal y D un $\mathbb{R}$–divisor de Cartier en X.*

(1) Si $f_1 : X \dashrightarrow X_1$ y $f_1 : X \dashrightarrow X_1$ son dos modelos amplios de D, entonces existe un isomorfismo $\varphi : X_1 \to X_2$ tal que $f_2 = \varphi \circ f_1$.

(2) Si $f : X \dashrightarrow Y$ es un modelo semi-amplio de D, entonces existe un modelo amplio $g : X \dashrightarrow Z$ de D tal que $g = h \circ f$, donde $h : Y \to Z$ es una contracción.

Ambos resultados permiten probar la Proposición 3.10.

Demostración de la Proposición 3.10. El Teorema 3.11 implica directamente que $-(K_X + \Delta)$ es semi-amplio (basta considerar $D = -(K_X + \Delta)$ y $a = 1$). Consdiremos ahora $\pi : (\mathbb{F}_n, \left(1-\frac{2}{n}\right) S_n) \to (X, \Delta)$ resolución minimal. Dado que $-(K_X + \Delta)$ es semi-amplio y $-(K_{\mathbb{F}_n} + \left(1-\frac{2}{n}\right) S_n) = \pi^*(-(K_X + \Delta))$, tenemos que π es un modelo semi-amplio de $-(K_{\mathbb{F}_n} + \left(1-\frac{2}{n}\right) S_n)$. Sea $\varphi : (\mathbb{F}_n, \left(1-\frac{2}{n}\right) S_n) \to (\mathrm{PC}_n, 0)$ resolución minimal. Dado que $-K_{\mathrm{PC}_n}$ es amplio, tenemos que φ es el modelo amplio de $-(K_{\mathbb{F}_n} + \left(1-\frac{2}{n}\right) S_n)$. Luego, el Teorema 3.13 implica que existe un morfismo birracional $\mu : X \to \mathrm{PC}_n$ tal que $\varphi = \mu \circ \pi$. Finalmente, dado que φ sólo contrae una curva, tenemos que necesariamente μ ó π es un isomorfismo.
El caso en que $(X_{\text{mín}}, \Delta_{\text{mín}}) = (\mathbb{P}^2, 0)$ es similar (pero más simple). □

[3]Ver [KM98, Theorem 3.3] (c.f. [HM07, Theorem 5.2.1]).
[4]Ver [BCHM10, Definition 3.6.5, Lemma 3.6.6].

3.3. Acotamiento del volumen

El objetivo de esta sección es demostrar el Teorema 3.3 sobre el acotamiento efectivo del volumen. Comencemos por probar un resultado premilimar (ver [AM04, Lemma 1.2, Lemma 1.4]).

Lema 3.14 (Alexeev, Mori)**.** *Sea X una superficie lisa, Δ un divisor en X con coeficientes en el intervalor $[0, 1-\varepsilon]$, donde $0 < \varepsilon \leq 1$. Si $-(K_X + \Delta)$ es big y nef, entonces X es una superficie racional. Más aún, $X \cong \mathbb{P}^2$ o bien existe un morfismo birracional $g : X \to \mathbb{F}_n$ donde $n \leq 2/\varepsilon$.*

Demostración. El Teorema 3.11 implica que $-(K_X + \Delta)$ es semi-amplio. En particular, si consideramos $m \gg 0$ entonces existe un divisor efectivo $D' \in |-m(K_X + \Delta)|$ tal que si definimos $D = \frac{1}{m}D'$ entonces $K_X + \Delta + D \sim_{\mathbb{R}} 0$ y $\Delta + D$ es un divisor con coeficientes en el intervalo $[0, 1-\varepsilon]$.

Consideremos el par (X, B) donde $B = \Delta + D = \sum b_j B_j$. Por construcción, $K_X \sim_{\mathbb{R}} -B \neq 0$ (por lo que $\kappa(X) = -\infty$). Si asumimos que $X \ncong \mathbb{P}^2$, podemos correr el K_X–MMP hasta obtener un morfismo birracional $g : X \to X'$ donde X' es un $\mathbb{P}^1$–fibrado sobre una curva lisa C. Denotemos por B'_j (resp. B') la imagen de B_j (resp. B) en X'. Notar que $K_{X'} + B' = g_*(K_X + B) = 0$.

Si existe una curva $E \subseteq X'$ tal que $E^2 < 0$, entonces $(1-\varepsilon)E^2 < 0 = (K_{X'} + B') \cdot E$ y luego

$$-2 \leq 2p_a(E) - 2 = (K_{X'} + E) \cdot E = \varepsilon E^2 + (K_{X'} + (1-\varepsilon)E) \cdot E \leq \varepsilon E^2 + (K_{X'} + B') \cdot E = \varepsilon E^2 < 0$$

por lo que $E \cong \mathbb{P}^1$. Dado que $X' \to C$ es relativamente minimal, E domina a C y luego $C \cong \mathbb{P}^1$. Por otra parte, si $g(C) > 0$ y $E^2 \geq 0$ para toda curva $E \subseteq X'$, entonces[5]

$$0 \geq 8 - 8g(C) = K_{X'}^2 = B'^2 \geq 0.$$

Se obtiene por lo tanto que $B'^2_j = B'_j \cdot B'_k = 0$ y por ende $D'^2 = 0$, donde D' es la imagen de D en X'. Sin embargo, D es imagen por un morfismo birracional de un divisor big y nef, por lo que es big y nef. En particular, $D'^2 > 0$ lo cual es una contradicción.

Finalmente, $C \cong \mathbb{P}^1$ y luego $X' \cong \mathbb{F}_n$ para cierto $n \neq 1$. Dado que

$$-2 = 2p_a(S_n) - 2 = (K_{X'} + S_n) \cdot S_n = \varepsilon S_n^2 + (K_{X'} + (1-\varepsilon)S_n) \cdot S_n \leq \varepsilon S_n^2 + (K_{X'} + B') \cdot S_n = \varepsilon S_n^2 = -\varepsilon n$$

tenemos que $n \leq 2/\varepsilon$. □

Demostración del Teorema 3.3. Reemplazando (X, Δ) por $(X_{\text{mín}}, \Delta_{\text{mín}})$, podemos suponer que X es lisa, los coeficientes de Δ pertenecen al intervalo $[0, 1-\varepsilon]$ y $-(K_X + \Delta)$ es big y nef. Gracias al Lema 3.14 sabemos que X es una superficie racional y luego podemos separar la prueba en 3 casos.

Caso 1: $X \cong \mathbb{P}^2$.
En este caso $-K_X$ es un divisor amplio y $-K_X \geq -(K_X + \Delta)$. Por ende $(K_X + \Delta)^2 \leq K_X^2 = 9$. Más aún, la igualdad ocurre si y sólo si $(X, \Delta) \cong (\mathbb{P}^2, 0)$.

Caso 2: $X \cong \mathbb{F}_n$, con $n \leq \lfloor 2/\varepsilon \rfloor$.
En este caso escribimos $\Delta = aS_n + \sum d_i \Delta_i$, donde $\Delta_i \subseteq \mathbb{F}_n$ es una curva irreducible diferente de S_n. Es fácil verificar[6] que el cono efectivo de $\mathbb{F}_n$ está dado por $\{\alpha[S_n] + \beta f,\ \alpha, \beta \in \mathbb{R}^{\geq 0}\}$ y que cada Δ_i se escribe de la forma $\Delta_i \equiv \alpha_i h + \beta_i f$, con $\alpha_i, \beta_i \geq 0$. Dado que $K_X + \Delta = K_X + aS_n + \sum d_i \Delta_i$ es anti-nef, tenemos que[7]

$$0 \geq (K_X + \Delta) \cdot S_n = n - 2 - na + \sum d_i \beta_i \geq n - 2 - na; \tag{1}$$

[5] Recordemos que si $X' = \mathbb{P}_C(E) \xrightarrow{p} C$ es una superficie geométricamente reglada, entonces $\mathrm{N}^1(X') = \mathbb{Z}h \oplus \mathbb{Z}f$, donde h es la clase de $\mathcal{O}_{\mathbb{P}(E)}(1)$ y f la clase de una fibra de p. Además, $f^2 = 0$, $h \cdot f = 1$, $h^2 = \deg(E)$ y $[K_{X'}] = -2h + (\deg(E) + 2g(C) - 2)f$. En particular, $K_{X'}^2 = 8 - 8g(C)$.

[6] Claramente cada divisor de la forma $\alpha[S_n] + \beta f$ representa un divisor efectivo. Por otra parte, sea D un divisor efectivo y escribamos $D = \lambda[S_n] + \sum D_i$, donde $\lambda \geq 0$ y $D_i \neq S_n$ curva irreducible. Como $[S_n] = h - nf$ y todo divisor se expresa en términos de h y f, escribimos $[D_i] = \alpha_i[S_n] + \beta_i f$. Finalmente, $D_i \cdot f = \alpha_i \geq 0$ y $D_i \cdot S_n = \alpha_i S_n^2 + \beta_i = -\alpha_i n + \beta_i \geq 0$, de donde $\alpha_i, \beta_i \geq 0$. Más aún, el calculo anterior y la relación $[S_n] = h - nf$ implica que si D divisor efectivo con $S_n \nsubseteq \mathrm{Supp}(D)$, entonces $[D] = \alpha[S_n] + \beta f = \alpha h + \gamma f$, donde $\gamma = \beta - \alpha n \geq 0$.

[7] Si $X \cong \mathbb{F}_n$, entonces $K_X \equiv -2h + (n-2)f$ por lo que $K_X \cdot S_n = (-2h + (n-2)f) \cdot (h - nf) = n - 2$ y $K_X \cdot f = -2$.

$$0 \geq (K_X+\Delta)\cdot f = -2+a+\sum d_i\alpha_i \geq -2+a. \tag{2}$$

Por otro lado, $K_X+\Delta \equiv (-2+a+\sum d_i\alpha_i)h+(n-2-na+\sum d_i\beta_i)f$ y luego

$$\begin{aligned}(K_X+\Delta)^2 &= ((-2+a+\sum d_i\alpha_i)h+(n-2-na+\sum d_i\beta_i)f)^2\\ &= n(-2+a+\sum d_i\alpha_i)^2+2(-2+a+\sum d_i\alpha_i)(n-2-na+\sum d_i\beta_i)\\ &\leq n(-2+a)^2+2(-2+a)(n-2-na) = 8+(2n-4)a-na^2\end{aligned}$$

gracias a las desigualdades (1) y (2). Notar que la igualdad ocurre si y sólo si $\sum d_i\alpha_i = \sum d_i\beta_i = 0$, lo cual equivale a $\sum d_i\Delta_i = 0$, i.e., $\Delta = aS_n$.

Para $n \geq 1$, definimos $\varphi(a) = 8+(2n-4)a-na^2 = -(a-2)(na+4)$ función cuadrática en a, con vértice en $a^* = 1-\frac{2}{n}$ y valor máximo $\varphi(a^*) = n+4+\frac{4}{n}$. Observamos que $a^*<0$ si $n=1$. Luego, tenemos que

$$(K_X+\Delta)^2 \leq \begin{cases} 8 & \text{si } n=0,1\\ n+4+\frac{4}{n} & \text{si } n\geq 2\end{cases}$$

con igualdad si y sólo si $n=0,1$ y $a=0$ o bien $n\geq 2$ y $a = 1-\frac{2}{n}$. Finalmente, analizando la función $f(x) = x+4+\frac{4}{x}$, notamos que $\lfloor 2/\varepsilon\rfloor+4+\frac{4}{\lfloor 2/\varepsilon\rfloor} \geq 8$ y que si $2\leq n\leq \lfloor 2/\varepsilon\rfloor$ entonces se tiene

$$n+4+\frac{4}{n} \leq \lfloor 2/\varepsilon\rfloor+4+\frac{4}{\lfloor 2/\varepsilon\rfloor}.$$

En conclusión $(K_X+\Delta)^2 \leq \lfloor 2/\varepsilon\rfloor+4+\frac{4}{\lfloor 2/\varepsilon\rfloor}$, y la igualdad ocurre si y sólo si $n=0,1$ y $\lfloor 2/\varepsilon\rfloor = 2$ o bien $n\geq 2$ y $\lfloor 2/\varepsilon\rfloor = n$, es decir, la igualdad ocurre si y sólo si:

(1) $(X,\Delta)\cong(\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^1,0)$ y $\frac{2}{3}<\varepsilon\leq 1$; o bien

(2) $(X,\Delta)\cong(\mathbb{F}_1,0)$ y $\frac{2}{3}<\varepsilon\leq 1$; o bien

(3) $(X,\Delta)\cong(\mathbb{F}_n,(1-\frac{2}{n})S_n)$ y $\frac{2}{n+1}<\varepsilon\leq\frac{2}{n}$, donde $n\geq 2$.

Cabe destacar que en los casos (1) y (2) el volumen $\mathrm{vol}(-(K_X+\Delta)) = 8 < 9$, y que en el caso (3) $\mathrm{vol}(-(K_X+\Delta)) \geq 9$ si y sólo si $\lfloor 2/\varepsilon\rfloor \geq 4 \Leftrightarrow 0<\varepsilon\leq\frac{1}{2}$, y que $\mathrm{vol}(-(K_X+\Delta)) \leq 9$ si y sólo si $\lfloor 2/\varepsilon\rfloor \leq 4 \Leftrightarrow \frac{2}{\varepsilon}<5 \Leftrightarrow \frac{2}{5}<\varepsilon\leq 1$

Caso 3: Existe un morfismo birracional no-trivial $g: X\to\mathbb{F}_n$, con $n\leq\lfloor 2/\varepsilon\rfloor$.

Gracias a la prueba del Lema 3.14, sabemos que $g: X\to\mathbb{F}_n$ se descompone como blow-downs de curvas (-1). Dado que el push-forward de una curva nef es nuevamente nef, tenemos que $g_*(K_X+\Delta) = K_{\mathbb{F}_n}+g_*\Delta$ es anti-nef. Luego, el Caso 2 implica que

$$(K_{\mathbb{F}_n}+g_*\Delta)^2 \leq \lfloor 2/\varepsilon\rfloor+4+\frac{4}{\lfloor 2/\varepsilon\rfloor}.$$

Si escribimos $K_X+\Delta = g^*(K_{\mathbb{F}_n}+g_*\Delta)+E$ con E es un divisor g–excepcional, entonces el lema de negatividad (ver Corolario 3.5) asegura que E es efectivo. Luego,

$$\begin{aligned}(K_X+\Delta)^2 &= (g^*(K_{\mathbb{F}_n}+g_*\Delta)+E)^2\\ &= (K_{\mathbb{F}_n}+g_*\Delta)^2+E^2\\ &\leq (K_{\mathbb{F}_n}+g_*\Delta)^2\\ &\leq \lfloor 2/\varepsilon\rfloor+4+\frac{4}{\lfloor 2/\varepsilon\rfloor}.\end{aligned}$$

Donde la primera desigualdad se obtiene gracias a que $E^2\leq 0$, y donde la igualdad ocurre si y sólo si $E^2=0$. Así,

$$(K_X+\Delta)^2 \leq \lfloor 2/\varepsilon\rfloor+4+\frac{4}{\lfloor 2/\varepsilon\rfloor}$$

y la igualdad ocurre si y sólo si $g : (X, \Delta) \to (\mathbb{F}_n, g_*\Delta)$ es un morfismo birracional crepante no-trivial, donde el par $(\mathbb{F}_n, g_*\Delta)$ es como en el Caso 2. Sin embargo, verificamos que un blow-up crepante de $(\mathbb{F}_n, g_*\Delta)$ produce un divisor Δ no efectivo. En otras palabras, en el Caso 3 se tiene que

$$(K_X + \Delta)^2 < \lfloor 2/\varepsilon \rfloor + 4 + \frac{4}{\lfloor 2/\varepsilon \rfloor}.$$

Finalmente, todo el análisis anterior prueba que

$$(K_{X_{\text{mín}}} + \Delta_{\text{mín}})^2 \leq \text{máx}\left\{9, \lfloor 2/\varepsilon \rfloor + 4 + \frac{4}{\lfloor 2/\varepsilon \rfloor}\right\}.$$

Además, la igualdad ocurre si y sólo si la resolución minimal del par (esta vez singular) (X, Δ) es isomorfo a $(\mathbb{P}^2, 0)$ o $(\mathbb{F}_n, (1 - \frac{2}{n})S_n)$ donde $n \geq 2$, en cuyo caso la Proposición 3.10 permite determinar todos los pares (X, Δ) de superficies weak log Del Pezzo ε–lc para las cuales se obtiene la igualdad. $\square$

3.4. Acotamiento del volumen cuando $\rho(X_{\text{mín}}) \geq 3$

A partir de la demostración del Caso 3 del Teorema 3.3 observamos que a medida que $\rho(X_{\text{mín}})$ aumenta la cota para el volumen $\text{vol}(-(K_X + \Delta))$ disminuye. Más precisamente, si $\rho(X_{\text{mín}}) \geq 3$ entonces

$$(K_X + \Delta)^2 < \lfloor 2/\varepsilon \rfloor + 4 + \frac{4}{\lfloor 2/\varepsilon \rfloor}.$$

Es natural por ende buscar mejores cotas en función de $\rho(X_{\text{mín}})$. Por ejemplo, si $\rho(X_{\text{mín}}) \geq 3$ entonces podemos asumir que $\rho(X_{\text{mín}}) = 3$ y por ende que $X_{\text{mín}}$ está dada por el blow-up en un punto de $\mathbb{F}_n$ con $n \leq \lfloor 2/\varepsilon \rfloor$, y analizar de manera similar que en el Caso 2 del Teorema 3.3. De este modo se obtiene en [Jia13, Theorem 1.3] el siguiente resultado.

Teorema 3.15 (Jiang). *Sea (X, Δ) una superficie weak log Del Pezzo ε–lc tal que $\rho(X_{\text{mín}}) \geq 3$. Entonces*

$$(K_X + \Delta)^2 \leq \lfloor 2/\varepsilon \rfloor + 3 + \frac{4}{\lfloor 2/\varepsilon \rfloor}.$$

Más aún, esta cota es optima.

Observación 3.16. La optimalidad en el Teorema 3.15 se debe a que si consideramos X como el blow-up de $\mathbb{F}_n$ en un punto $p \notin S_n$, con $n = \lfloor 2/\varepsilon \rfloor$, y denotamos por S'_n la transformada estricta de S_n en X, entonces

$$\left(K_X + \left(1 - \frac{2}{n} S'_n\right)\right)^2 = \lfloor 2/\varepsilon \rfloor + 3 + \frac{4}{\lfloor 2/\varepsilon \rfloor}.$$

De manera similar, Jiang obtiene en [Jia13, Theorem 1.4] una cota en el caso que $\rho(X_{\text{mín}}) \geq 4$ la cual muestra ser optimal al considerar el blow-up de $\mathbb{F}_n$ en dos puntos $p_1, p_2 \notin S_n$ de tal suerte que las fibras correspondientes $p_1 \in F_{p_1}$ y $p_2 \in F_{p_2}$ son distintas.

Referencias

[Ale94] Alexeev, V.: *Boundedness and K^2 for log surfaces.* Internat. J. Math. 5 (1994), no. 6, 779–810.

[AM04] Alexeev, V. and Mori, S.: *Bounding singular surfaces of general type.* Algebra, arithmetic and geometry with applications (West Lafayette, IN, 2000), 143–174, Springer, Berlin, 2004.

[Bea96] Beauville, A.: *Complex algebraic surfaces.* Translated from the 1978 French original by R. Barlow, with assistance from N. I. Shepherd-Barron and M. Reid. Second edition. London Mathematical Society Student Texts, 34. Cambridge University Press, Cambridge, 1996.

[Bir16] Birkar, C.: *Singularities of linear systems and boundedness of Fano varieties.* arXiv 1609.05543.

[BCHM10] Birkar, C., Cascini, P., Hacon, C. and McKernan, J.: *Existence of minimal models for varieties of log general type.* J. Amer. Math. Soc. 23 (2010), no. 2, 405–468.

[HM07] Hacon, C. and McKernan, J.: *Extension theorems and the existence of flips.* Flips for 3-folds and 4-folds, 76–110, Oxford Lecture Ser. Math. Appl., 35, Oxford Univ. Press, Oxford, 2007.

[Jia13] Jiang, C.: *Bounding the volumes of singular weak log del Pezzo surfaces.* Internat. J. Math. 24 (2013), no. 13, 1350110, 27 pp.

[Kaw92] Kawamata, Y.: *Termination of log flips for algebraic 3-folds.* Internat. J. Math. 3 (1992), no. 5, 653–659.

[KMM92] Kollár, J., Miyaoka, Y. and Mori, S.: *Rational connectedness and boundedness of Fano manifolds.* J. Differential Geom. 36 (1992), no. 3, 765–779.

[KM98] Kollár, J. and Mori, S.: *Birational geometry of algebraic varieties.* With the collaboration of C. H. Clemens and A. Corti. Translated from the 1998 Japanese original. Cambridge Tracts in Mathematics, 134. Cambridge University Press, Cambridge, 1998.

[Man86] Manin, Yu. I.: *Cubic forms.* North-Holland Mathematical Library, 4. North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1986.