- Anillo de Chow, $A^*(X)$
- Mapeo de Abel-Jacobi
- Conjectura de Bloch
- $p_g=0$, Resultados varios / Bloch.

~ Anillo de Chow.

Sea X variedad suave proyectiva compleja con $\dim(X)=n$.

Dado $d\geq 0$, $\mathcal{Z}^d(X) :=$ Grupo abeliano libre generado por subvariedades cerradas irreducibles de X con codimensión d (d-cociclo).

$= \mathcal{Z}_{(n-d)}(X)$ ($(n-d)$-ciclos)

(Dos definiciones equivalentes).

Def: Diremos que un k-ciclo es principal si es $\mathrm{div}(f) = \text{zero}(f) - \text{polos}(f)$,

f función racional definida en $Y \subseteq X$

y $\dim(Y) = K+1$.

① Dos K-ciclos $V, W \in Z^{n-k}(X)$ son racionalmente equivalentes $\boxed{(V \underset{r.e}{\sim} W)}$ si

$$V - W = \sum_i \operatorname{div}(f_i), \quad f_i \text{ definida en } Y_i$$

$\dim(Y_i) = K+1$.

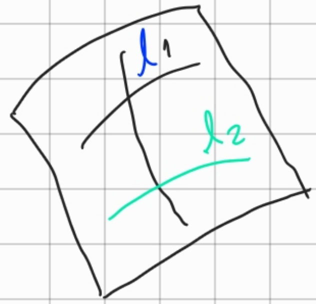
② Dos k-ciclos $V, W \in Z^{n-k}(X)$ son racionalmente equivalentes si existe una colección de subvariedades $Y_1, Y_2, \dots, Y_r \subseteq X \times \mathbb{P}^1$ tq $\dim(Y_i) = k+1$ y

$V = V_0, V_1, \dots, V_r = W \subseteq X$, tales que dada la proyección $\overline{p_{2,i}}$,

$$\begin{tikzcd}
Y_i \arrow[r, hook] \arrow[dr, "\overline{p_{2,i}}"'] & X \times \mathbb{P}^1 \arrow[d, "p_2"] \\
& \mathbb{P}^1
\end{tikzcd}$$

$\exists\, a_i, b_i \in \mathbb{P}^1$ con $\overline{p_{2,i}}^{-1}(a_i) = V_{i-1}$ y

$\overline{p_{2,i}}^{-1}(b_i) = V_i$.



$l_1 \underset{re}{\sim} l_2$.

Def: $d \geq 0$, el d-esimo grupo de Chow de X es

$$A^d(X) := Z^d(X)/_{r.e}$$

$$= Z_{n-d}(X)/_{r.e}$$

$$= A_{n-d}(X).$$

Algunos casos.

- $A^1(X) = \left\{ \begin{matrix} \text{Divisores de} \\ \text{Weil} \end{matrix} \right\} \Big/ \begin{matrix} \text{equ.} \\ \text{lineal} \end{matrix}$

$= \mathrm{Pic}(X).$

- $A^0(X) = A_n(X) = \mathbb{Z}\cdot[X]_{\sim} \ni \alpha[X],$
  $\alpha \in \mathbb{Z}$

- $A^d(X) = 0$, si $d > n = \dim(X).$

- $A^n(X) = A_0(X) = \mathbb{Z}\left\{\begin{matrix}\text{clases de}\\ \text{puntos en } X\end{matrix}\right\}$

- $$\begin{aligned} A^n(X) = A_0(X) &\xrightarrow{\deg} \mathbb{Z} \quad , \alpha_i \in \mathbb{Z} \\ \sum_{i=0}^{\ell} \alpha_i [x_i] &\longmapsto \sum_{i=0}^{\ell} \alpha_i \end{aligned}$$

función bien definida.

$$\left[\begin{matrix} v - w = \sum \mathrm{div}(f_i) \\ f_i \text{ def } C_i . \end{matrix}\right]$$

podemos escribir

$$A_0(X) = \bigoplus_{t \geq 0} A_{0,t}(X)$$

$$A_{0,t}(X) = \{\text{Cero ciclos de grado } t\}$$

$$\boxed{A_{0,0}(X) = \{\text{Cero ciclos de grado Cero}\}}$$

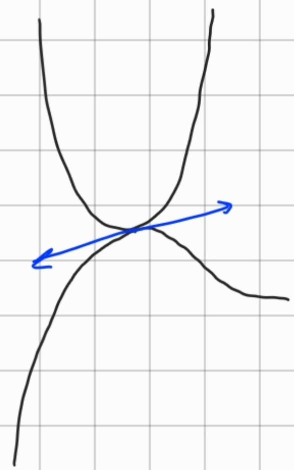
- Se puede definir un producto

$$A^d(X) \times A^e(X) \longrightarrow A^{d+e}(X)$$

<u>Def:</u> $V \in Z^d(X), W \in Z^e(X)$, estos intersectan *transversalmente* si

- V, y W son suaves.
- para cada punto $p \in V \cap W$.

$$\operatorname{span}(T_{V,p}, T_{W,p}) = T_{X,p}.$$



$\subseteq \mathbb{P}^2$

NO!

Cuando hay tranversalidad:

$V \in Z^d(X)$ irreducible y

$W = \sum_i{}' \beta_i W_i \in Z^e(X)$ con V y W_i

transversales para cada i.

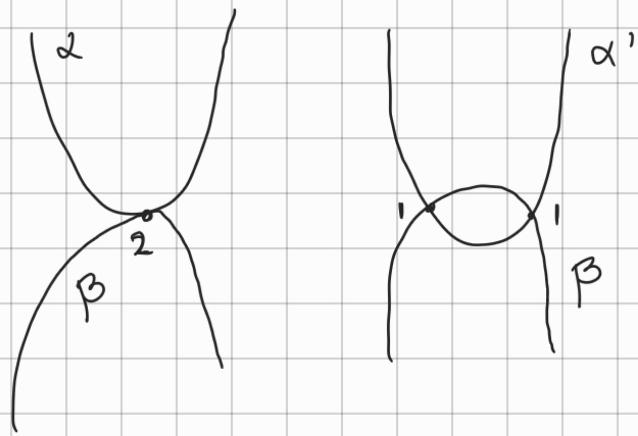
$$[V]\cdot[W] = \Big[\sum_i \beta_i (V \cap W_i)\Big].$$

- Cuando No hay transversalidad usamos lo siguiente:

Hecho:

1) Dados dos ciclos α, β en X, siempre existe $\alpha' \underset{re}{\sim} \alpha$ que intersecta a β transversalmente

2) Si $V \underset{re}{\sim} V'$ y $V \cap W$ y $V' \cap W$ son transversales, entonces $V \cap W \underset{r.e}{\sim} V' \cap W$.



Def (General): $\omega = \sum_i a_i W_i \underset{r.e}{\sim} W \in Z^e(X)$ y $V \in Z^d(X)$, V tranversal a ω

$$\Rightarrow [V][W] = [V \cap W] = \Big[\sum_i a_i (V \cap W_i) \Big].$$

El anillo de Chow de X es

$$A^*(X) := \bigoplus_{d \geq 0} A^d(X).$$

Con el producto de intersección.

- $$A^*(\mathbb{P}^2) = A^0(\mathbb{P}^2) \oplus A^1(\mathbb{P}^2) \oplus A^2(\mathbb{P}^2)$$
$$= \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}\cdot H \oplus \mathbb{Z}\cdot H^2$$
$$\simeq \mathbb{Z}[H]/H^3.$$

$$A^*(\mathbb{P}^n) = \mathbb{Z}[H]/H^{n+1}.$$

- $A_{0,0}(X)$.

Abel - Jacobi.

Volvamos a $A_0(X) = \bigoplus_{t \geq 0} A_{0,t}(X)$.

$$A_{0,0}(X).$$

Iniciamos con el Mapeo de Albanese.

- $i : H_1(X, \mathbb{Z}) \longrightarrow H^0(X, \Omega^1_X)^*$

$$\gamma \longmapsto \int_\gamma : H^0(X, \Omega^1_X) \to \mathbb{C}$$

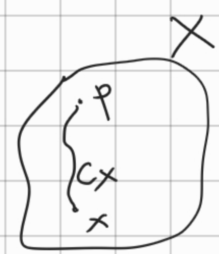
$$\omega \longmapsto \int_\gamma \omega.$$

- Beauville. Superfrees.

- $H^0(X, \Omega^1_X)^* / \mathrm{Im}(i) := \mathrm{Alb}(X)$

Variedad Albanese de X

Mapeo de Albanese



$$\underset{\sim}{\alpha} : \underline{X} \longrightarrow \underline{\mathrm{Alb}(X)}$$

tomamos $p \in X$ fijo, C_x camino de x a p.

$$\alpha(x) = \int_{C_x} \omega .$$

Abel-Jacobi $\tilde{\alpha}$ extender de X a $A_{0,0}(X)$. $\tilde{\alpha}(\sum a_i [x_i])$

$\sum a_i \, \alpha(x_i)$

- Si $C = X$ curva,

$$A_{0,0}(C) = \left\{ \begin{array}{l} \text{fibrados lineales} \\ \text{de grado cero} \end{array} \right\} \Big/ \text{E.l}$$

$= Pic^0(C).$

Abel mostró que

$$\tilde{\alpha} : A_{0,0}(C) \longrightarrow Alb(C) = J(C)$$

es inyectiva y Jacobi que es isomorfismo.

$$A_{0,0}(C) \simeq J(C).$$

¿Qué pasa en Superficies?

• Conjectura de Bloch.

$\operatorname{Ker}(\tilde{\alpha}) = T(S)$? $p_g = h^0(S, K_S)$

• Mumford '69 ; Si S una superficie $p_g \neq 0$, $T(S)$ tiene rango infinita (No trivial).

$h^2(S, \mathcal{O}_S)$

• Bloch - Kas - Liberman '76.

Si $\operatorname{Kod}(S) < 2$ y $p_g = 0$

$\Rightarrow$ $T(S)$ trivial.

• Lo que queda:

Conjectura de Bloch.

Si S de tipo general y $p_g = 0$, entonces $T(S)$ trivial.

Obs. Sobre superficies minimales de tipo general con $p_g = 0$

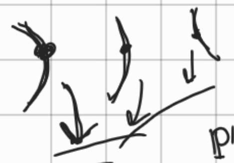
1) $$\chi = 1 - \boxed{h^1(S,\mathcal{O}_S)} + h^2(S,\mathcal{O}_S) = 1 - \boxed{q} + \underbrace{p_g}_{0} \geq 1 \Rightarrow q = 0.$$

$\dim(Y_i) = 1$

$$(\dim(\mathrm{Alb}(S)) = q = 0)$$

Bloch: $A_{0,0}(S) = 0$. ?? ??

$\subseteq S \times \mathbb{P}^1$



2) $p_g = q = 0$, entonces $1 \leq K^2 \leq 9$.

$\mathcal{M}_{e,K^2}$ espacio de Moduli.

$$S \text{ "}\in\text{" } \{\mathcal{M}_{11,1};\ \mathcal{M}_{10,2};\ \mathcal{M}_{9,3};\ \mathcal{M}_{8,4};\ \mathcal{M}_{7,5},\ \mathcal{M}_{6,6},\ \mathcal{M}_{5,7},\ \mathcal{M}_{4,8},\ \mathcal{M}_{3,9}\}$$

- $M_{11,1}$ Superficies numericamente de Godeaux

[Primeras Godeaux 1930]

- $M_{10,2}$ Superficies numericamente Campedelli

[Campedelli 1935].

- $K_S^2 = 1$ (N. Godeaux) $\Rightarrow$ C. M. Reid

$\pi_1(S) \in \{\overset{?}{1}, \mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_3, \mathbb{Z}_4, \mathbb{Z}_5\}$

- $K_S^2 = 2$ (N. Campedelli)

Mendes-Lopes y R. Pardini 06, 07.

$|\pi_1^{alg}| \leq 9$.

- $\pi_1^{alg} \not\cong \mathfrak{S}_3$, D_8 8 elementos

Q: $\exists$ S numericamente Campedelli con $\pi_1^{alg} = \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$?

- Prop (Cil - Men - Par, 08).

(1) Si $3K_S^2 < c_2(S)$ y $|\pi_1| < \infty$

$\Longrightarrow$ $|\pi_1(S)| \leq 9$.

$|\pi_1(S)| = 9 \Rightarrow$ N. Campedelli

(2) $K_S^2 = 3\chi(S) - 1 \Longrightarrow |\pi_1^{alg}| \leq 8$.

π_1^{alg} finito

- $\chi = 1$ y $|\pi| = 8 \Rightarrow$ S N. Campedelli.

Q: Si S Numericamente Campedelli, $\pi_1(S)$ finito?

Regresando a Bloch.

Algunos resultados parciales.

- H. Inose - M. Mizukami '79.

  La Superficie clásica de Godeaux

  $$\{x_0^5 + x_1^5 + x_2^5 + x_3^5 = 0\} / \sigma$$

  $$\sigma(x_0 : x_1 : x_2 : x_3) = [x_0 : \xi x_1 : \xi^2 x_2 : \xi^3 x_3]$$

  Satisface Bloch.

- Bauer - Catanese - Pignatelli, 2010.

  Si S biracional a $C_1 \times C_2 / G$,

  Con G finito actuando efectivamente

  en C_i curvas de genero $g \geq 2$.

  Cumple Bloch.

Comentario: Para Superficies de tipo general con $c_1^2 = c_2$. $(p_g = 0, M_{6,6})$ que son producto-cociente $C_1 \times C_2 / G$.

Satisface : Green-Griffith-Lang y Lang-Vojta.

[Y. Grivaux, J. Restrepo, E. Rousseau, 2017]

- Bauer 2014.

??

Si S de Inoue con $p_g = 0$ y $K^2 = 7$, Satisface Bloch.

Criterio: S de tipo general con $p_g = 0$,

$$G = (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2 \leq \mathrm{Aut}(S).$$

$$\forall \sigma \in G \setminus \{0\}, \quad \mathrm{Kod}(S/\sigma) \leq 1.$$

Entonces S Cumple Bloch.

Teo: (Bauer- Catanese '97)

Sup de tipo general S con $p_g=0$ y $K^2=7$ que son de Inoue.

Forman un componente conexo de $\mathcal{M}_{5,7}$.

- K. Banerjee 2017.

Teo: ① Si S numericamente de bödeax con una involución i tq $S/i=R$ racional y $-K_R$ efectivo. Si el branch locus consiste de curvas racionales y una única curva de género 2. S cumple Bloch.

② Si S Numericamente Campedelli, tiene una involución i, el mapeo $\varphi_{|2K|}$ bicanonico está compuesto con i, S/i racional y el branch locus son solo (-2)-Curvas. Entonces S Cumple Bloch.

③ Si S numericamente campedelli con una involución i, $\varphi_{|2K|}$ No está compuesto con i y S/i racional o elíptica. Se Cumple Bloch.