# SGA 2021-1 (Semana 13): "Resultados clásicos en torno a la conjetura de Bloch"

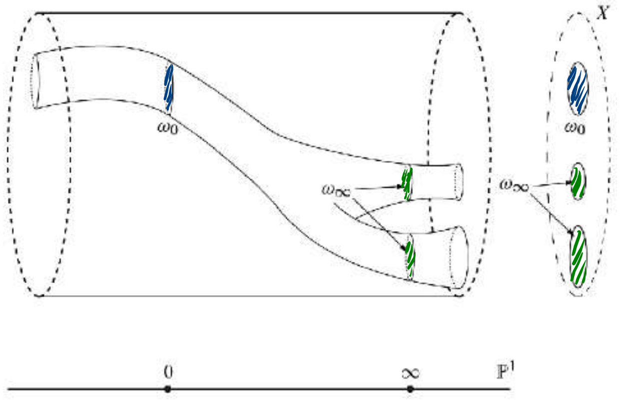
**Referencias:**


[1] D. Mumford, "Rational equivalence of 0-cycles on surfaces", J. Math. Kyoto Univ. (1969).

[2] S. Bloch, A. Kas, D. Lieberman, "Zero cycles on surfaces with $p_g = 0$", Comp. Math. (1976).


## § Recuerdos de la vez pasada

("3264 and all that...")




Sea $S$ superficie alg. proyectiva suave $/\mathbb{C}$ y denotemos

$$A_0(S) = \left\{ 0\text{-ciclos}: \sum_{\text{finita}} n_i x_i \ , \ n_i \in \mathbb{Z} \ y \ x_i \in S \text{ puntos} \right\} \Big/ \sim_{rac}$$

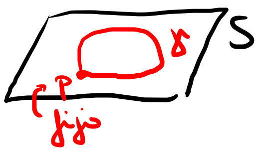
$$= \bigoplus_{d \in \mathbb{Z}} A_{0,d}(S)$$

(clases de) 0-ciclos de grado $d$.

$$\rightsquigarrow A_{0,0}(S) = \left\{ \sum_{\text{finita}} n_i [x_i] \ , \ n_i \in \mathbb{Z} \ , \ x_i \in S \ \text{tq} \ \sum n_i = 0 \right\}$$

Vimos que $i : H_1(S,\mathbb{Z}) \longrightarrow H^0(S,\Omega^1_S)^*$
$\gamma \longmapsto \int_\gamma$

$\int_\gamma : H^0(S,\Omega^1_S) \to \mathbb{C}$
$\omega \mapsto \int_\gamma \omega$

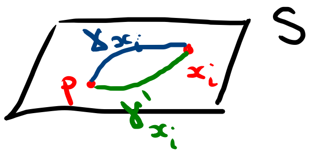



Permite definir un toro complejo $Alb(S) := H^0(S,\Omega^1_S)^* / i(H_1(S,\mathbb{Z})) \underset{\text{dif}}{\simeq} \mathbb{C}^q/\Lambda$, $\Lambda \cong \mathbb{Z}^{2q}$
llamada variedad de Albanese de S.

$q = q(S) := h^0(S,\Omega^1_S)$
irregularidad

Ambos objetos se relacionan mediante la aplicación de Abel-Jacobi:

$$\alpha : A_{0,0}(S) \longrightarrow Alb(S), \quad \sum_{i=1}^r n_i[x_i] \longmapsto \sum_{i=1}^r n_i[\alpha(x_i)]$$




donde $\alpha(x_i) \in H^0(S,\Omega^1_S)^*$ está dado por $\alpha(x_i)(\omega) := \int_{\gamma_{x_i}} \omega$
⇝ $[\alpha(x_i)] \in Alb(S)$ ✓

$\int_{\gamma_{x_i}} \omega = \int_{\gamma'_{x_i}} \omega$ (Stokes)

Conjetura de Bloch (1976): Si $p_g(S) \overset{\text{def}}{=} h^0(S,\Omega^2_S)$ es cero, entonces

$$T(S) := \ker[\alpha : A_{0,0}(S) \longrightarrow Alb(S)] \text{ es trivial}$$

## § Resultados "clásicos" (enunciados):

Bloch: "Si $T(S)$ es trivial, entonces $A_{0,0}(S)$ es un subgrupo de $\mathrm{Alb}(S)$.

Sin embargo, Mumford probó que si $p_g(S) > 0$ entonces $A_{0,0}(S)$ es "no-acotado"".

**Teorema** (Mumford 1969): Sea $S$ superficie alg. proy. suave$/\mathbb{C}$ con $p_g(S) > 0$.
Entonces, la afirmación
"$\exists n \in \mathbb{N}$ tal que: $\forall m \in \mathbb{N}$ y todo 0-ciclo $A \in S^{(m)}$, $\exists$ subvariedad de $S^{(m)}$ codim $\leq n$ que parametriza 0-ciclos efectivos racionalmente equivalentes a $A$" $\Big\}$ $(\star)$
es falsa!

**Obs** (Rojtman 1980, Ann. of Math): $(\star) \overset{\text{car}=0}{\Longleftrightarrow} \alpha: A_{0,0}(S) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Alb}(S)$ es un isomorfismo de grupos

**Teorema** (Bloch-Kas-Lieberman 1976): Sea $S$ superficie alg. proy. suave$/\mathbb{C}$ con $p_g(S) = 0$ y $\kappa(S) \leq 1$. Entonces $T(S) = 0$.

## § Superficies con $p_g > 0$ (Severi y Mumford)

Sea $d \in \mathbb{N}^{\geq 1}$, el d-ésimo producto simétrico de $S$ es $S^{(d)} := (S \times \overset{d \text{ veces}}{\cdots} \times S) / \mathfrak{S}_d$

Obs: $\dim_{\mathbb{C}} S^{(d)} = 2d$, pero $S^{(d)}$ es singular ! Además, $x = x_1 + \ldots + x_d \in S^{(d)}$ 0-ciclo

Idea: $S = \mathbb{C}^2$, $\mathfrak{S}_2 \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} = \langle \sigma \rangle \curvearrowright S \times S = \mathbb{C}^4$ como $(\mathrm{Id}_{\mathbb{C}^2}, -\mathrm{Id}_{\mathbb{C}^2}) \rightsquigarrow S^{(2)} \simeq \mathbb{C}^2 \times \text{⏳}$

Fogarty (1968): El morfismo de Hilbert-Chow $S^{[d]} \longrightarrow S^{(d)}$, $Z \longmapsto \sum_{x \in S} l(Z_x)[x]$ es una resolución de singularidades, donde $S^{[d]}$ es el esquema de Hilbert de $d$ pts en $S$.

↳ Más detalles: "Lectures on Hilbert schemes of points on surfaces" (Hikaru Nakajima).

Hecho (Mumford): (★) equivale a

① $\exists\, n \in \mathbb{N}$ tq si $A \in A_0(S)$ cumple $\deg(A) \geq n \Rightarrow A \underset{rat}{\sim} E \geq 0$ efectivo; o bien (cf. caso de curvas: $n = 2g-1$ ✓)

② $\exists\, n \in \mathbb{N}$ tq $S^{(n)} \times S^{(n)} \twoheadrightarrow A_{0,0}(S)$, $(A, B) \longmapsto [A] - [B]$ es sobreyectivo

Idea:

① $\Rightarrow$ ②: Sea $n \in \mathbb{N}$ como en ①, $\alpha \in A_{0,0}(S)$ y $B \geq 0$ un 0-ciclo efectivo de $\deg(B) = n$ $\Rightarrow$ $\alpha + B \underset{rac}{\sim} A$ con $A \geq 0$ de $\deg(A) = n$, i.e., $\alpha = [A] - [B]$ ✓

② $\Rightarrow$ (★): Sea $x_0 \in S$. Mumford prueba que

$$Z := \{ (A,B,C) \in S^{(n)} \times S^{(n)} \times S^{(m)} \text{ tq } [A]-[B] = \underbrace{[C] - m[x_0]}_{\in A_{0,0}(S)} \}$$

es unión numerable de cerrados de $S^{(n)} \times S^{(n)} \times S^{(m)}$.

② $\Rightarrow$ $\exists\, Z_0$ componente irred. de $Z$ tq $pr_3|_{Z_0} : Z_0 \twoheadrightarrow S^{(m)}$ sobreyectivo ✓

Para $C_0 \in S^{(m)}$ dado, considerar $W := \{ C \in S^{(m)} \text{ tq } \exists (A,B) \text{ con } (A,B,C), (A,B,C_0) \in Z_0 \}$

$\Rightarrow C_0 \underset{rat}{\sim} C$ y cualquier componente irred. $W_0$ de $W$ cumple $\operatorname{codim}(W_0) \geq n$ ✓

(★) $\Rightarrow$ ①: Sea $x \in S$ y $\sigma_x : S^{(m-1)} \longrightarrow S^{(m)}$, $A' \longmapsto A' + x$.

Dado $E \in S^{(m)}$ fijo, existe por (★) una subvar $W \subseteq S^{(m)}$ de $\operatorname{codim} \leq n$ tq $A \in W \Rightarrow A \underset{rac}{\sim} E$

Para $m \gg 0$, $W$ intersecta $\operatorname{Im}(\sigma_x)$ y luego:

"$\exists\, m$ tq $\forall A \in S^{(m)}$ y $\forall x \in S$, $\exists A' \in S^{(m-1)}$ tq $A \underset{rac}{\sim} A' + x$"

Finalmente si $\alpha \in A_0(S)$ de $\deg(\alpha) \geq m$, $\alpha = [A] - [B]$ con $A \geq 0$ y $B = \sum_{i=1}^{r} x_i \geq 0$

$\rightsquigarrow A \underset{rac}{\sim} A_1 + x_1$, $A_1 \underset{rac}{\sim} A_2 + x_2$, ..., $\alpha \underset{rac}{\sim} A_r \geq 0$ ∎

Supongamos ahora que $p_g(S)>0$, i.e, $\exists\ \omega\in H^0(S,\Omega^2_S)$ 2-forma no-nula.

<u>Construcción</u>: Dada $T$ variedad alg suave y $f:T\to S^{(n)}$ morfismo, consideramos

$$\begin{tikzcd} (T\times_{S^{(n)}} S^n)_{red} =: \tilde{T} \arrow[r, "\tilde{f}"] \arrow[d, "p"] & S^n = S\times \overset{n \text{ veces}}{\cdots} \times S \arrow[d, "\tilde{\pi}"] \\ T \arrow[r, "f"] & S^{(n)} \end{tikzcd}$$

Dada $\omega$ 2-forma en $S$, se define $\omega^{(n)} := \sum_{i=1}^{n} pr_i^*\omega \in H^0(S^n,\Omega^2_{S^n})^{\mathfrak{S}_n}$

<u>Obs clave</u>: Si $S^{(n)}$ fuese suave (no lo es!) $\Rightarrow \exists!\ \eta\in H^0(S^{(n)},\Omega^2_{S^{(n)}})$ tq $\omega^{(n)}=\pi^*(\eta)$.

↪ Ver Beauville "Complex Alg. Surfaces" lemma VI.11.

↗ (cf. Brion "Diff. forms on quotients by reductive group actions" 1998)

<u>Mumford</u> (cálculos explícitos): $\exists!\ \eta_f\in H^0(T,\Omega^2_T)$ tal que $\tilde{f}^*(\omega^{(n)})-p^*(\eta_f)$ es de torsión

Más aún,

① Si $g: T'\to T$ entonces $\eta_{f\circ g}=g^*(\eta_f)$ (functorialidad en $f$).

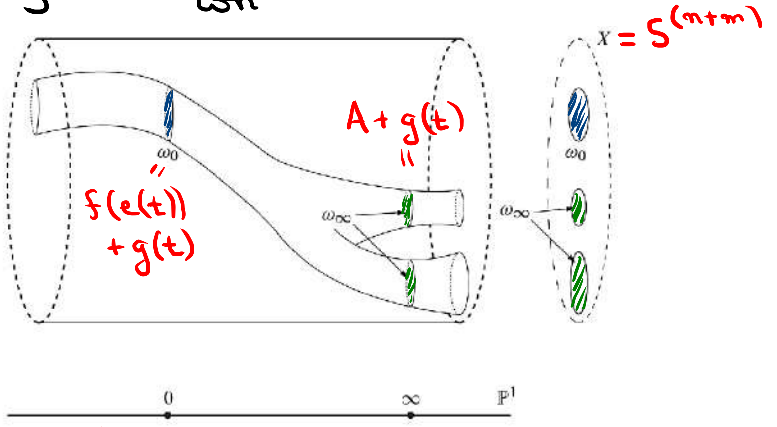
② Si $h: T\to S^{(m)} \rightsquigarrow (f+h): T\to S^{(n+m)}$ y $\eta_{f+h}=\eta_f+\eta_h$ (aditividad en $f$).

**Teorema** (Mumford - Severi): Sea $T$ variedad suave y $f : T \to S^{(n)}$ morfismo tal que los 0-ciclos en $f(T)$ son rac. equivalentes. Entonces, $\eta_f = 0$.

**Idea**:

Sea $A \in f(T)$. Mumford prueba (Lemma 3) que $\exists\, T'$ variedad suave y $e : T' \to T$ dominante, y existen $g : T' \to S^{(n)}$, $h : T' \times \mathbb{P}^1 \to S^{(n+m)}$ con

auxiliar




$$h(t,0) = f(e(t)) + g(t) \quad (1)$$
$$h(t,\infty) = A + g(t) \quad (2)$$

constante

$$\Rightarrow \eta_h|_{T' \times \{0\}} \overset{(1)}{=} \eta_g + e^*(\eta_f) \quad \text{y} \quad \eta_h|_{T'\times\{\infty\}} \overset{(2)}{=} \eta_g$$

Dado que $H^0(T' \times \mathbb{P}^1, \Omega^2_{T'\times\mathbb{P}^1}) \cong H^0(T', \Omega^2_{T'}) \oplus \cancel{H^0(T', \Omega^1_{T'}) \otimes \overset{0}{H^0(\mathbb{P}^1, \Omega^1_{\mathbb{P}^1})}}$ (Künneth)

$\Rightarrow \eta_h = pr_1^* \omega'$ para cierta $\omega' \in H^0(T', \Omega^2_{T'}) \Rightarrow \eta_h|_{T'\times\{0\}} = \eta_h|_{T'\times\{\infty\}}$

y luego $e^*(\eta_f) = 0 \underset{e \text{ dominante}}{\Longrightarrow} \eta_f = 0$ ■

Para ver que (★) es falsa, consideramos $A = \sum x_i \in S^{(n)}$ suave (eg. $x_i \neq x_j$ si $i \neq j$)

Sea $\tilde{\omega}$ 2-forma no-deg. en cada $T_{x_i} S$ ⇝ $\omega^{(n)}$ no-degenerada en $(x_1, \dots, x_n) \in S^n$

⇝ $\omega^{(n)}$ desciende (localmente) a $\omega$ 2-forma no-degenerada en $T_{S^{(n)}, A} \cong \mathbb{C}^{2n}$

subvariedad como en (★)

Sea $f : T \hookrightarrow S^{(n)}$ morfismo con $T$ suave y tq los 0-ciclos en $f(T)$ son rac. equiv.

con $A \in f(T) \Rightarrow 0 = \eta_f \underset{loc}{=} f^*(\omega)$ y luego $T_{T,A} \subseteq T_{S^{(n)}, A}$ subesp. isotrópico resp.

a la forma simpléctica $\omega \Rightarrow \dim(T) = \dim(T_{T,A}) \leq n$, ie, $\operatorname{codim}(T) \geq n \longrightarrow +\infty$

Así,

"$\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tal que: $\forall n \in \mathbb{N}$ y todo 0-ciclo $A \in S^{(n)}$, $\exists$ subvariedad de codim $\leq n_0$ que parametriza 0-ciclos efectivos racionalmente equivalentes a $A$" $\Big\}$ (★)

es falsa ■

## § Superficies con $\kappa(S) \leq 1$ y $p_g = 0$

El resultado de Bloch-Kas-Lieberman pasa por la clasificación de superficies minimales. Más precisamente, las ideas principales son las sgtes:

Observaciones previas:

① Los objetos que intervienen en la conjetura de Bloch son invariantes birracionales para superficies proy. suaves / $\mathbb{C}$

⇝ Podemos suponer $S$ minimal (i.e., $\nexists\, C \subseteq S$ tq $C \cong \mathbb{P}^1$ y $C^2 = -1$)

② El grupo $T(S) \overset{\text{def}}{=} \ker\left[A_{0,0}(S) \xrightarrow{\alpha} \text{Alb}(S)\right]$ es divisible (i.e., $\forall\, n \in \mathbb{N}^{\geq 1}$ y todo $[A] \in T(S)$, existe $[B] \in T(S)$ tal que $n[B] = [A]$).

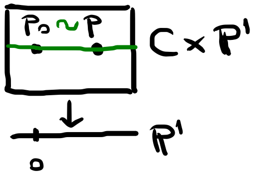
⇝ Basta probar que $\exists\, N \in \mathbb{N}^{\geq 1}$ tal que $N \cdot T(S) = 0$ para concluir $T(S) = 0$.

Supongamos que $p_g = 0$ y $\kappa(S) \leq 1$:

$\kappa(S)=-\infty$ : $S \underset{bir}{\sim} \mathbb{P}^2$ (racional) ó bien $S \underset{bir}{\sim} C\times\mathbb{P}^1$ con $g(C)\geq 1$ (unireglada).

La vez pasada: $A^*(\mathbb{P}^2)\simeq \mathbb{Z}[H]/\langle H^3\rangle \rightsquigarrow A_0(\mathbb{P}^2)\underset{deg}{\cong}\mathbb{Z}$ y luego $A_{0,0}(\mathbb{P}^2)=0$ ✓

Si $S=C\times\mathbb{P}^1$:




Para $[\alpha]\in A_0(C\times\mathbb{P}^1)$, $\exists\, [\alpha_0]\in A_0(C)$ tq $\alpha \underset{rac}{\sim} \alpha_0\times\{0\}$.

Además, $\mathrm{Alb}(S)\cong \mathrm{Alb}(C)$ pues $h^0(\mathbb{P}^1,\Omega^1_{\mathbb{P}^1})=0$.

Luego: $T(S)\cong \ker[A_{0,0}(C)\xrightarrow{\sim}\mathrm{Alb}(C)]=0$ (teorema de Abel-Jacobi !)

Luego, basta asumir $\kappa(S)\in\{0,1\}$ $(\Rightarrow K_S^2=0)$.

Noether: $\cancel{K_S^2}+\chi_{top}(S)=12(1-q+\cancel{p_g})$ y $\chi_{top}(S)\overset{\text{Poincaré}}{=}2-2b_1+b_2\overset{\text{Hodge}}{=}2-4q+h^{1,1}$

$\Rightarrow 10=8q+h^{1,1}$ y luego $(q,h^{1,1},\chi_{top})\in\{(1,2,0),(0,10,12)\}$

Clasificación de sup. minimales de $\kappa(S)=0$: si $p_g=0$ entonces

i) $q=0 \Rightarrow S$ superficie de Enriques ($\Rightarrow 2K_S\sim 0$ y $\exists\, \tilde S\xrightarrow{2:1}S$ con $\tilde S$ sup. K3).

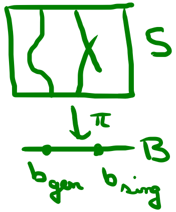
ii) $q=1\Rightarrow S$ bielíptica $\rightsquigarrow$ alb: $S\to E$ con $E$ curva elíptica $\simeq \mathrm{Alb}(S)$

con $q=1$, $\chi_{top}=0$ y $F$ = fibra general curva elíptica

(cf. Kondo, "K3 surfaces" Ch. 9)

**Obs** (Shapiro - Shafarevich 1971): Toda sup. de Enriques $S$ admite $\pi : S \to \mathbb{P}^1$ fibración elíptica.

Además, toda sup. minimal $S$ de $\kappa(S) = 1$ admite una fibración elíptica.




$\rightsquigarrow$ En todos los casos, $\exists \pi : S \to B$ fibración elíptica

↳ $\pi$ podría <u>no</u> tener secciones $\sigma : B \to S$ ! (permite conducir)

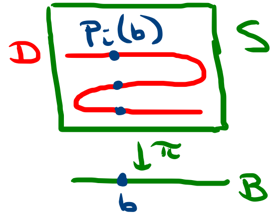
**Construcción** (Fibración jacobiana):

↳ Ver [Barth, Hulek, Peters, Van de Ven] §V.9 ó [Iskovskikh, Shafarevich] §10.3

$\pi^{-1}(b)$

Dada $\pi : S \to B$ fibración elíptica, $\exists !$ $\mathrm{Jac}(\pi) = J\pi : J \to B$ tq $(J\pi)^{-1}(b) \cong \mathrm{Pic}^0(S_b)$

En part, $\exists \sigma : B \to J$ sección.




Más aún, dada una multisección $D \subseteq S$ (i.e., un divisor tq $D \xrightarrow{\pi|_D} B$ finito)

construimos $f : S \dashrightarrow J$ dominante: si $D \cap \pi^{-1}(b) = \sum_{i=1}^{d} p_i(b)$

$\rightsquigarrow f : S \hookrightarrow S \times_B \overset{d \text{ veces}}{\cdots} \times_B S \dashrightarrow J$

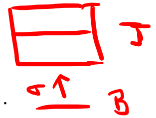
$s \mapsto (s, \dots, s)$; $q = (q_1, \dots, q_d) \mapsto \sum_{i=1}^{d} q_i - \sum_{i=1}^{d} p_i(\pi(q)) \in \mathrm{Pic}^0(S_{\pi(q)})$

En part, $h^0(J, mK_J) \leq h^0(S, mK_S)$ $\forall m \geq 1$ $\underset{m=1}{\Rightarrow}$ $p_g(J) = 0$.

Para concluir la demostración:

1° **Reducción del problema:** Si $T(J)=0$ entonces $T(S)=0$.

(Se prueba que en tal caso $d^2\cdot Z=0$ para cada $Z\in T(S)$: Ver Proposition 4).




2° **Caso 1** ($q=0$, superficies de Enriques): $\pi: J\to B\cong\mathbb{P}^1$ con $\sigma: B\to J$ sección.

Aquí: $K_J$ combinación entera de fibras de $\pi$ $\rightsquigarrow$ $K_J=\pi^*(M)$ con $M\sim K_J\cdot\sigma(B)$

$\rightsquigarrow$ **Adjunción**: $K_B = K_J|_{\sigma(B)} + N = M+N$, con $\mathcal{O}_B(N)\cong N_{\sigma(B)/J}$. Para $m\geq 1$

$h^0(mK_J) = h^0(\pi^*(m(K_B-N))) \overset{\text{Proyección}}{=} h^0(B, m(K_B-N)) = 0$ (pues $p_g(J)=0$ y $B\cong\mathbb{P}^1$)

$\underset{m=2}{\Rightarrow} P_2 = q = 0$ y luego $J \underset{\text{bir}}{\sim} \mathbb{P}^2$ (Castelnuovo) $\Rightarrow T(J)=0$ ✓

3° **Caso 2** ($q=1$): Aquí $B=\mathrm{Alb}(S)$ curva elíptica y $\pi=\mathrm{alb}: S\to B$ con fibra gral $F$.

i) Si $g(F)\geq 2$ entonces $\pi$ suave, $\kappa(S)=1$ y $S\cong(F\times B)/G$ con $G$ grupo finito

ii) Si $g(F)=1$, reemplazamos $\pi$ por $J\pi: J\to B$ $\rightsquigarrow$ $J\cong(F\times B)/G$ como en i).

En ambos casos, $p_g=0 \Rightarrow F/G\cong\mathbb{P}^1$ racional.

Usando esto, se prueba que todo $A\in A_{0,0}((F\times B)/G)$ cumple $|G|^2\cdot[A]=0$

y luego $T(S)=T((F\times B)/G)=0$ ✓