$$
\begin{tikzcd}
H \curvearrowright X \curvearrowleft G \arrow[d] \\
X/G
\end{tikzcd}
$$

sga bloch 3

22/Junio/21

Bloch y los automorfismos

<< Método Inose-Mizukami >>

«Rational equivalence of 0-cycles on some surfaces of general type with $p_g = 0$» Math. Ann. 244, 205-217 (1979)
H. Inose, M. Mizukami

91. S = superficie proyectiva compleja no singular

$A_0(S)$ = grupo de 0-ciclos en S / equivalencia racional

$$A_{00}(S) = \left\{ \sum_{\text{finito}} n_i P_i \ : \ n_i \in \mathbb{Z},\ \sum n_i = 0 \right\} \Big/ \left\langle \underbrace{\Gamma(\infty) - \Gamma(0)}_{\text{en } S} : \Gamma \text{ curva en } \mathbb{P}^1 \times S \to \mathbb{P}^1 \right\rangle$$

> **Conjetura de Bloch:** Si S es superficie de tipo general con $p_g(S) = 0 \implies A_{00}(S)$ es trivial.
> (lo que queda)

- La conjetura es invariante salvo biracionalidad, con lo que hay que tomar K_S nef solamente.
- Tipo general y $p_g(S) = 0 \implies q(S) = 0$.
  De esta forma,

  No hay Ω^1_S globales y
  No hay Ω^2_S globales

- Tenemos que $K_S^2 \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$.
  [Mirar un poco el survey de Catanese 2010 y los otros]

★ Inose y Mizukami encuentran un método para verificar que $A_{00}(S) = 0$ cuando $S = X/G$ y X tiene bastantes automorfismos aparte de G.

$$G \circlearrowright X \longrightarrow X/G = S$$

Extras $= H$ ↺

El método Inose-Mizukami ha sido usado en varias superficies $p_g = 0$, y ellos mismos lo usan para mostrar Bloch para: (i) $\boxed{\text{Godeaux clásica}}$ $K^2 = 1$ (ii) Burniat $K^2 = 2, 3, 4, 5, 6$ (iii) Campedelli $K^2 = 2$

donde se cumple ★ (típicamente no debemos esperar eso).
e.g. Godeaux simplemente conexas

¡hay sólo eso!

§2. Los lemas.

<u>Lema 1</u>: $G \leq \mathrm{Aut}(X)$ de orden n, X una superficie. Sea Y modelo no singular de X/G y sea $\pi : X \dashrightarrow Y$ aplicación racional cociente.

Entonces existen homomorfismos $\pi_* : A_{\infty}(X) \to A_{\infty}(Y)$ y $\pi^* : A_{\infty}(Y) \to A_{\infty}(X)$ tal que

$$\pi^* \pi_* = \sum_{g \in G} g_* \qquad \pi_* \pi^* = n$$

donde n significa multiplicación por n en $A_{\infty}(Y)$.

<u>Dem</u>: π_* y π^* están bien definidos por el moving lemma [Fulton]. [Pensar en π morfismo cociente y que sucede con órbitas de puntos] ∎

<u>Lema 2</u>: Como en Lema 1, tenemos

$$\boxed{A_{\infty}(Y) = 0 \iff \sum_{g \in G} g_* = 0.}$$

Lemma (1.3) "Sections on alg. cycles"

<u>Dem</u>: (1) Si Z es suave cuasi-proy $\Rightarrow$ $A_{\infty}(Z)$ es divisible.
(2) Luego,
$$x \in A_{\infty}(Y) \Rightarrow \exists z \in A_{\infty}(Y) \text{ tal que } x = n^2 z.$$

(3) $x = n^2 z = \pi_*\pi^*\pi_*\pi^* z = \pi_* \sum_{g\in G} g_*\pi^* z = 0$

si $\sum_{g\in G} g_* = 0$.

(4) Si $A_\infty(Y) = 0$, $0 = \pi^*\pi_* x = \sum_{g\in G} g_* x$ ∎

[Si $\pi : X \to Y$ genericamente finito, entonces
$\pi_*\pi^* = n$ (moving lemma) $\pi^*\pi_* = ?$ (órbitos)

$\therefore \pi^*\pi_* = 0 \iff A_\infty(Y) = 0$.
El problema sería qué hacer con estos "órbitos"]

Preg: ¿Qué sucede con $p_g = 0$ y automorfismos?

aquí hay harto para hablar, ver cuaderno...

[$G \circlearrowright X$ = cubr. Kummer

$\boxed{H} \circlearrowright X$

$X \to S = X/G$ $(p_g = 0)$

$X/G = S \supset \{L_1, \dots, L_m\}$ posición gen.

$nL_{m+1} \sim L_1 + (n-1)L_m$
$\vdots$
$nL_{2m-1} \sim L_{m-1} + (n-1)L_m$

$\sum_{g\in G} g_* = 0$

$(\mathbb{Z}/n)^{m-1} = G$]

[$\cancel{H} \circlearrowright X \circlearrowleft G$ $\sum g_* \neq 0$

$X \to S = X/G$, $p_g \neq 0$]

§3. La superficie de Godeaux típica.

$$X = \{ z_0^5 + z_1^5 + z_2^5 + z_3^5 = 0 \} \subset \mathbb{P}^3_{\mathbb{C}}$$

$$\sigma : [z_0, z_1, z_2, z_3] \mapsto [z_0, \omega z_1, \omega^2 z_2, \omega^3 z_3]$$
donde $\omega^5 = 1$, $\omega \neq 1$.

$G = \langle \sigma \rangle \simeq \mathbb{Z}/5$ no fija puntos en X.

$$X \xrightarrow{\text{étale}} Y = X/\langle\sigma\rangle$$

La superficie $Y := X/G$ es la superficie típica de Godeaux.
Como $K_X^2 = d(d-4)^2 = 5$ y $\chi(\mathcal{O}_X) = 1 + \frac{(d-1)(d-2)(d-3)}{6} = 5$

$\Rightarrow K_Y^2 = 1$ $\chi(\mathcal{O}_Y) = 1$. Si $h^0(\Omega^1_Y) > 0$ entonces

vía pull-back tendríamos $h^0(\Omega^1_X)>0 \Rightarrow\Leftarrow \therefore h^0(\Omega^1_Y)=0$
$\Rightarrow \chi(\mathcal{O}_Y) = 1 = 1 - h^0(\Omega^1_Y) + h^0(\Omega^2_Y) \Rightarrow p_g(Y)=0$.

Notar que $\pi_1(Y) \simeq \mathbb{Z}/5$. $\left[\pi^*\Gamma \cdot \underbrace{\pi^* K_Y}_{K_X} = 5\Gamma \cdot K_Y > 0\right]$

<u>obs</u> Notar que para X_d y $X_d/\mathbb{Z}/d = Y_d$ $\boxed{\text{suave}}$ tendríamos
$\chi(\mathcal{O}_{Y_d}) = \frac{d^2-6d+11}{6} = 2-d+\frac{d^2-1}{6} \in \mathbb{N} \Leftrightarrow 3 \nmid d$

$K^2_{Y_d} = (d-4)^2 \quad q(Y_d)=0 \quad p_g(Y_d) = \frac{d^2-6d+5}{6} > 0 \ (d>6)$.

[Si $d=p$ primo $\Rightarrow$ no fija puntos $[1,\omega,\omega^2,\omega^3]$]

<u>obs</u>

tipo	$\tau = (\alpha_0,\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$	$X/\langle\tau\rangle$
I	$(1,1,1,\omega)$	racional
II	$(1,1,\omega,\omega)$	racional
III	$(1,\omega,\omega^2,\omega^3)$	Godeaux
IV	$(1,1,\omega,\omega^{-1})$	$p_g>0$
V	$(1,1,\omega,\omega^2)$	$p_g>0$

¡son todos out de la Fermat!

<u>Teorema</u> : $\displaystyle\sum_{j=0}^{4} \sigma_*^j = 0$.

Notación : $P(\tau) := \displaystyle\sum_{j=0}^{4} \tau_*^j$ para τ de orden 5.

<u>Lema 3</u> : $P(\tau)=0$ para τ en I o II.
<u>Dem</u> : Caemos en racional, y para esos $A_\infty = 0$.
Luego usar equivalencia Inose-Mizukami ■

Lema 4: Sean τ y ρ como en la tabla. Entonces:

$$P(\tau)P(\rho) = P(\rho) + P(\tau) + P(\tau\rho) + P(\tau\rho^2) + P(\tau\rho^3) + P(\tau\rho^4) - 5.$$

En particular, Si τ o $\rho \in$ I o II $\Rightarrow$

$$P(\rho) + P(\tau) + P(\tau\rho) + P(\tau\rho^2) + P(\tau\rho^3) + P(\tau\rho^4) = 5.$$

Dem:

$$\begin{array}{ccccc} 1 & \rho & \rho^2 & \rho^3 & \rho^4 \\ \tau & \tau\rho & & & \\ \tau^2 & \tau^2\rho & & \vdots & \\ \tau^3 & & & & \\ \tau^4 & & \cdots & & \tau^4\rho^4 \end{array}$$

Conmutativo

∎

¡★! La estrategia de demostración es una suerte de álgebra lineal donde los $P(\tau)$ son las incognitas. Es decir, se demostrará que $P(\sigma) = 0$ para σ de tipo 3 dadas las muchas condiciones lineales de los τ en la tabla y permutaciones de variables

, ie, exceso de relaciones muestra que la única solución para $P(\sigma)$ es 0. Recordar que no es el caso para $p_8 > 0$, y así hay $P(\tau) \neq 0$ también.

Para manejar los cálculos, I-M asigna símbolos a los $P(\tau)$ y muestra también como actuan permutaciones en coordenadas:

$$P((1, w, w^2, w^3)) =: g_1 \qquad z_0 \leftrightarrow z_1 \Rightarrow g_1 \leftrightarrow g_5$$

encontrar los a_i, b_i, c_i, d_i, e_i, f_i

[mostrar el cálculo de Alg. lineal, se usa divisibilidad!]

Table 2.

τ	$P(\tau)$	τ	$P(\tau)$	τ	$P(\tau)$
$1:\omega:\omega^2:\omega^3$	g_1	$1:\omega:1:\omega^2$	b_1	$\omega:1:\omega^2:1$	e_1
$1:\omega:\omega^3:\omega^2$	g_2	$1:\omega^2:1:\omega$	b_2	$\omega^2:1:\omega:1$	e_2
$1:\omega:\omega^2:\omega^{-1}$	g_3	$1:\omega:1:\omega^{-1}$	b_3	$\omega:1:\omega^{-1}:1$	e_3
$1:\omega:\omega^{-1}:\omega^2$	g_4	$1:\omega:\omega^2:1$	c_1	$\omega:1:1:\omega^2$	f_1
$1:\omega:\omega^{-1}:\omega^3$	g_5	$1:\omega^2:\omega:1$	c_2	$\omega^2:1:1:\omega$	f_2
$1:\omega:\omega^3:\omega^{-1}$	g_6	$1:\omega:\omega^{-1}:1$	c_3	$\omega:1:1:\omega^{-1}$	f_3
$1:1:\omega:\omega^2$	a_1	$\omega:\omega^2:1:1$	d_1		
$1:1:\omega^2:\omega$	a_2	$\omega^2:\omega:1:1$	d_2		
$1:1:\omega:\omega^{-1}$	a_3	$\omega:\omega^{-1}:1:1$	d_3		

Preg: Hacer tabla con $d>6$ primo,
¿Qué sucede con las ecuaciones?

Table 3.

$z_0\leftrightarrow z_1$	$z_0\leftrightarrow z_2$	$z_0\leftrightarrow z_3$	$z_1\leftrightarrow z_2$	$z_1\leftrightarrow z_3$	$z_2\leftrightarrow z_3$
$g_1\leftrightarrow g_5$	$g_1\leftrightarrow g_3$	$g_1\leftrightarrow g_6$	$g_1\leftrightarrow g_6$	$g_1\leftrightarrow g_4$	$g_1\leftrightarrow g_2$
$g_2\leftrightarrow g_6$	$g_2\leftrightarrow g_5$	$g_2\leftrightarrow g_4$	$g_2\leftrightarrow g_3$	$g_2\leftrightarrow g_5$	$g_3\leftrightarrow g_4$
$g_3\leftrightarrow g_4$	$g_4\leftrightarrow g_6$	$g_3\leftrightarrow g_5$	$g_4\leftrightarrow g_5$	$g_3\leftrightarrow g_6$	$g_5\leftrightarrow g_6$

La versión precisa de Inose: [I. Bauer, PAMS 2014]

Def 1.- G grupo finito, $H \leq G$. Entonces $z(H) := \sum_{h \in H} h \in \mathbb{C}G$.

Lema Inose: Sea X sup. no singular, $G \leq \mathrm{Aut}(X)$ finito.
Sean $H, H_1, \dots, H_r \leq G$.
Sea $I = \langle z(H_1), \dots, z(H_r) \rangle$ ideal bi-lateral.

Asumir (1) $z(H) \in I$ y (2) $T(S/H_i) = 0$ $\ker(\alpha : A_\infty(S/H_i) \to \mathrm{Alb})$

$\Rightarrow T(S/H) = 0$.

Recuerdos de $p_g > 0$:

Si S = superficie algebraica con $p_g > 0$ entonces Mumford muestra que $A_0(S)$ es ∞ dimensional en el sentido:

Si $W \underset{\text{subvar}}{\subset} \mathrm{Sym}^n(S)$ y $\mathrm{Sym}^n(S) \longrightarrow A_0(S)$ envía W a un punto $\Rightarrow \dim(W) \leq n$.

Si fijamos $p \in S$ y $n \in \mathbb{N} \Rightarrow$

$$D - np \sim 0$$

para $D \in \mathrm{Sym}^n(S)$ de dimensión $\geq 2n - n$.

$\therefore$ $A_\infty(S)$ tiene familias de dim arbitraria.
[contrario a $A_\infty($$) = \mathrm{Jac}$]

Luego: ¿Porqué $p_g > 0$ no funciona el alg lineal?
[Mirar las Fermat Y_d d primo]

Fin