1 Los grupos de Chow son finitos dimensionales (de alguna forma).

Recuerdo: Cuando S es una superficie con $p_g(S)>0$ entonces $A_0(S)$ no es finito dimensional.

Introducción a los motivos de Chow

Historia: Fue introducido por Grothendieck mediante correspondencia con Serre. ~ 1964.

⇝ La idea viene de las teorías de cohomologías.

Ej: Cohomología étale con $l \neq \mathrm{car}(k)$, Cohomología de Betti, cohomología cristalina, etc.

Teoría de cohomología de Weil.

Teoría de motivos ≈ teoría universal de cohomología

- La construcción / definición es simple

Sea k un cuerpo y sea SmProj_k la categoría de las variedades proyectivas suaves, que a priori no son irreducibles ni equidimensionales

Definición: Una correspondencia de X a Y es un elemento $\alpha \in CH^i(X\times Y)$ (con coeficientes racionales).

- Para α correspondencia de X a Y la denotaremos $\alpha: X \vdash Y$

correspondencias de grado m.

$$\mathrm{Cor}^m(X,Y) = \bigoplus CH^{m+d_i}(X_i \times Y) \quad \text{donde} \quad X = \coprod X_i$$

$d_i = \dim X_i$

componentes irreducibles

⟶ Correspondencias jugarán un rol importante en la definición de la categoría de motivos, en específico en los morfismos

Sean $\alpha : X \vdash Y$ y $\beta : Y \vdash Z$ correspondencias de grado m y n respectivamente, entonces definimos la composición $\beta \circ \alpha$ como

$$\beta \circ \alpha := (pr_{XZ})_* \{ \underbrace{pr_{XY}^* \alpha \cdot pr_{YZ}^* \beta}_{\in CH(X\times Y\times Z)} \}$$

$\alpha \in CH(X\times Y)$, $\beta \in CH(Y\times Z)$

donde $pr_{XZ} : X \times Y \times Z \to X \times Z$ es la proyección y $\cdot$ es el producto de intersección.

Si $f : Y \to X$ es un morfismo de esquemas, entonces denotamos $\bar{f} : X \vdash Y$ definida por $\Gamma_f^t = \tau^*(\Gamma_f)$ donde

$\tau : X \times Y \to Y \times X$
$(x,y) \mapsto (y,x)$

y Γ_f es el grafo de f.

Obs: $f : Y \to X$ y $g : Z \to Y$ morfismos, entonces $\overline{f \circ g} = \bar{g} \circ \bar{f}$

Definición: La categoría de los motivos de Chow (puros) está definida de la siguiente forma:

1) Los objetos son triples (X, α, m) donde $X \in \mathrm{SmProj}_k$, $\alpha \in \mathrm{Cor}^0(X,X)$ es una correspondencia idempotente $\alpha \circ \alpha = \alpha$ y $m \in \mathbb{Z}$:

2) Los morfismos entre (X,α,m) y (Y,β,n) están definidos por

$$\mathrm{Hom}((X,\alpha,m),(Y,\beta,n)) = \beta\circ \mathrm{Corr}^{n-m}(X,Y)\circ\alpha \subset \bigoplus CH^{d_i+n-m}(X_i\times Y)$$

Obs: 1) α es el morfismo identidad para el motivo (X,α,m)

2) Sea Δ_X el ciclo asociado a la diagonal, entonces $\forall\, \alpha\in \mathrm{Corr}(X,Y)$ y $\beta\in\mathrm{Corr}(Z,X)$ se tiene que

$$\alpha\circ\Delta_X=\alpha \qquad y \qquad \Delta_X\circ\beta=\beta$$

Definamos el functor

$$\begin{aligned} h: \mathrm{SmProj}_k^{opp} &\longrightarrow \mathrm{Chow}(k) \\ X &\longmapsto (X,\Delta_X,0) =: h(X) \\ (X\xrightarrow{f} Y) &\longmapsto \left(h(X)\xrightarrow[f]{h(f)} h(Y)\right) \end{aligned}$$

$h(X)$ es el motivo de Chow de X

Ejemplos: 1) Motivo de Lefschetz $\mathbb{L} := \underbrace{(\mathrm{Spec}(k),\mathrm{id},-1)}_{\simeq\ (\mathbb{P}^1,\ \mathbb{P}^1\times e,\ 0)}$

$\mathbb{L}^n = (\mathrm{Spec}(k),\mathrm{id},-n)$

2) Motivo de Tate $\mathbb{T} := (\mathrm{Spec}(k),\mathrm{id},1)$ similar para $\mathbb{T}^n$.

3) Motivo unidad $\mathbb{1} := (\mathrm{Spec}(k),\mathrm{id},0)$

Obs: Sea $\alpha\in\mathrm{Corr}^m(X,Y)$ entonces existe una acción

$$\begin{aligned} \alpha_*: CH^n(X) &\longrightarrow CH^{n+m}(Y) \\ \beta &\longmapsto (pr_Y)_*\{\alpha\cdot pr_X^*(\beta)\} \end{aligned}$$

De esta forma, es posible definir el grupo de Chow y de cohomología de un motivo

1) Sea $M = (X, \alpha, m)$ entonces $CH^d(M) := Hom(\mathbb{L}^d, M)$
$= Im(\alpha_*)$

⚠ La construcción que se dio está basada en los grupos de Chow, i.e

$CH^n(X) := Z^n(X)/_{\sim_{rat}} = Z^n(X)/Z^n_{rat}(X)$ racionalmente equivalente a cero.

Existen otras relaciones de equivalencia (equivalencias adecuadas o buenas)

- Algebraica, Nilpotente smash, homológica, numérica

$Z^n_{rat}(X) \subsetneq Z^n_{alg}(X) \subsetneq Z^n_{\otimes}(X) \underset{(?)}{\subseteq} Z^n_{hom}(X) \underset{(?)}{\subseteq} Z^n_{num}(X)$.

La categoría de motivos está dotada del producto tensorial y suma directa

(1) $(X, \alpha, m) \otimes (Y, \beta, n) = (X \times Y, pr_X^* \alpha \cdot pr_Y^* \beta, m+n)$
donde pr_X es la proyección $pr_X : X \times Y \to X$ (lo mismo para Y)

(2) Cuando $m = n$ la suma directa se define como

$(X, \alpha, m) \oplus (Y, \beta, m) = (X \amalg Y, \alpha \oplus \beta, m)$ donde
$\alpha \oplus \beta = pr_{X \times X}^* \alpha + pr_{Y \times Y}^* \beta \in CH(X \times X) \oplus CH(Y \times Y) \subset CH((X \amalg Y) \times (X \amalg Y))$

Cuando $n \neq m$ sin pérdida de generalidad suponemos $m < n$, entonces

$$(X, \alpha, m) \cong (X, \alpha, n) \otimes \mathbb{L}^{n-m}$$
$$\cong (X \times (\mathbb{P}^1)^{n-m}, \alpha', n), \text{ entonces}$$

$$(X, \alpha, m) \oplus (Y, \beta, n) = (X \times (\mathbb{P}^1)^{n-m} \amalg Y, \alpha' \oplus \beta, n)$$

- Sean $M_i = (X_i, \alpha_i, m_i)$ y $N_i = (Y_i, \beta_i, n_i)$ motivos y $f_i : M_i \to N_i$ morfismos representados por $\gamma_i \in CH(X_i \times Y_i)$

$$\bigotimes_{i=1}^{n} f_i = pr_1^* \gamma_1 \cdot \ldots \cdot pr_n^* \gamma_n \in CH\left(\prod X_i \times \prod Y_i\right)$$

donde $pr_i : \prod_j X_j \times \prod_j Y_j \to X_i \times Y_i$ proyecciones.

Si $f = f_1 = f_2 = \ldots$ entonces $\otimes f = f^{\otimes n}$ (notación)

- Un morfismo de motivos se dice nilpotente smash si $\exists\, n > 0$ tal que $f^{\otimes n} = 0$
- Nilpotente $\exists\, m > 0$ tal que $f^m = 0$

Motivos finito dimensionales

Sea M un motivo y consideremos $M^{\otimes n} = \bigotimes_{i=1}^{n} M$, la idea es estudiar su descomposición por la acción natural de S_n en $M^{\otimes n}$

Recuerdo: Sea G un grupo finito, $R = \mathbb{Q}[G]$ ← sumas formales

$$r = \sum_{g \in G} r(g) \cdot g$$
$\in \mathbb{Q}$

Hay $h = \#\{$clases de conjugación de $G\}$ representaciones irreducibles W_j con caracteres χ_j, $j = 1, \dots, h$.

$$e_j = \frac{\dim W_j}{\|G\|} \sum_{g \in G} \overline{\chi_j(g)} \cdot g \Rightarrow e_j \cdot e_i = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \\ e_i & \text{si } i = j \end{cases}$$

$$\sum e_i = e_G = 1_K.$$

- Hay una relación 1-1

$$\left\{ \begin{matrix} \text{representaciones} \\ \text{irreducibles de } \sigma_n \end{matrix} \right\} \xleftrightarrow{1-1} \left\{ \begin{matrix} \text{particiones} \\ \text{de } n \end{matrix} \right\}$$

$\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_s)$ $\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_s$

Sea W_λ la representación asociada a λ.

Los casos en los cuales estamos interesados son los siguientes

1) $\lambda = (n)$ correspondiente a la representación trivial $\sigma(v) = v$

$$e_{sym} = e_{(n)} = \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in \sigma_n} \sigma$$

2) $\lambda = (\overbrace{1, \dots, 1}^{n\text{-veces}})$ $\sigma(v) = \text{sign}(\sigma) v \rightarrow$ representación alternante

$$e_{alt} := e_{(1,\dots,1)} = \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in \sigma_n} \text{sign}(\sigma) \cdot \sigma$$

Acción del grupo simétrico en productos

Sea $X^n = X \times \dots \times X$

$$\sigma : X^n \longrightarrow X^n.$$
$$(x_1, \dots, x_n) \longmapsto (x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)})$$

$\Gamma_\sigma(X) \to$ graf del mapeo, se puede generalizar para $r = \sum_\sigma r(\sigma)\,\sigma \in R$

$\Rightarrow \Gamma_r(X) \in Cor^0(X^n)$ dado por $\Gamma_r(X) = \sum_{\sigma \in S_n} r(\sigma)[\Gamma_\sigma(X)]$

Obs: $\Gamma_{rs}(X) = \Gamma_r(X) \circ \Gamma_s(X)$

$\Rightarrow d_\lambda(X) := \Gamma_{e_\lambda}(X) : X^n \longrightarrow X^n$ es un proyector

$\rightsquigarrow$ Volviendo a los motivos, se tiene que

$M^{\otimes n} = (X \times \dots \times X, (p \times \dots \times p), nm) \in Cor^0(X, X)$ $\quad \alpha \circ \alpha = \alpha$

$\Gamma_\sigma(M) := \Gamma_\sigma(X) \circ p^{\otimes n} = p^{\otimes n} \circ \Gamma_\sigma(X)$, en general

$$\Gamma_r(M) = \sum r(\sigma)\, \Gamma_\sigma(M) \in Hom_{Chow(k)}(M^{\otimes n}, M^{\otimes n})$$

Lema: Sea $M = (X, p, m) \in Chow(k)$ entonces:

(1) $d_\lambda(X) \circ p^{\otimes n} = p^{\otimes n} \circ d_\lambda(X)$ es un proyector para X^n

(2) $d_\lambda(X) \circ p^{\otimes n}$ descompone $p^{\otimes n}$

(3) $d_\lambda(X) \circ p^{\otimes n} \perp d_\mu(X) \circ p^{\otimes n}$ si $\lambda \neq \mu$

Idea: Ocupar $\Gamma_{rs}(M) = \Gamma_r(M) \circ \Gamma_s(M)$ y el hecho que $p^{\otimes n}$ conmuta con Γ_r.

Definición: Sea $M = (X, p, m) \in Chow(k)$ y λ una partición de n. Denotaremos

$$\Pi_\lambda M = (X^n, d_\lambda \circ p^{\otimes n}, nm) \in Chow(k)$$

En particular! $\quad Sym^n(M) = T_{(n)} M = (X^n, d_{sim} \circ p^{\otimes n}, nm)$

$\quad \Lambda^n M = T_{(1,\dots,1)} M = (X^n, d_{alt} \circ p^{\otimes n}, nm)$

Definición (dimensión)

- Sea M un motivo. Se dice que M es un motivo puramente finito dimensional si $\exists\, n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ tal que $\Lambda^n M = 0$
- Finito dimensional de forma impar si $\exists\, n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ tal que $Sym^n M = 0$

M es finito dimensional si se puede escribir como la suma $M = \underset{\text{par}}{M^+} \oplus \underset{\text{impar}}{M^-}$ $\quad (M = \underset{\text{par}}{N^+} \oplus \underset{\text{impar}}{N^-})$ $\quad M^+ \simeq N^+$, $M^- \simeq N^-$

- Dado que M^+ y M^- son únicos módulo isomorfismo entonces $\dim(M) = \dim(M^+) + \dim(M^-)$ está bien definido

$\dim(M^+) = \max\{n \mid \Lambda^n M \neq 0\}$ $\left(\dim M^- = \max\{n \mid Sym^n M \neq 0\}\right)$

Prop: Sean M y N motivos par o impar (dimensión). Si M y N tienen la misma paridad, entonces $M \otimes N$ es par, en otro caso $M \otimes N$ es impar

$\rightsquigarrow \dim(M \otimes N) \leq \dim(M) \cdot \dim(N)$

$\Rightarrow$ Producto de motivos finitos dimensionales es finito dimensional!

Teorema: Sea M un motivo y sea $f \geq n$, $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_s)$ partición de f. Entonces

(1) Si $Sym^{n+1}(M) = 0$ y $\lambda_1 > n \Rightarrow T_\lambda M = 0$

(2) Si $\Lambda^{n+1} M = 0$ y $\lambda_{n+1} \neq 0$ entonces $T_\lambda M = 0$

Morfismos entre motivos finito dimensionales

Prop: Sea M y N dos motivos finito dimensionales de paridad distinta y sea $f: M \to N$ un morfismo. $\Rightarrow f$ es nilpotente smash ($f^{\otimes \ell} = 0$ si $\ell > \dim(M) \cdot \dim(N)$)

Sketch: Sea λ y μ particiones de ℓ y consideremos

$$M^{\otimes \ell} \xrightarrow{d_\lambda} M^{\otimes \ell} \xrightarrow{f^{\otimes \ell}} N^{\otimes \ell} \xrightarrow{d_\mu} N^{\otimes \ell}$$

Si $\mu \neq \lambda \Rightarrow d_\mu \circ f^{\otimes \ell} \circ d_\lambda = \underbrace{d_\mu \circ d_\lambda}_{=0} \circ f^{\otimes \ell} = 0.$

- Si $\mu = \lambda \Rightarrow d_\mu \circ f^{\otimes \ell} \circ d_\mu = d_\mu \circ f^{\otimes \ell}$. Si M es impar y N es par
- $\Rightarrow \lambda_1 \geq \dim(N)$ o $\lambda_{\dim(N)+1} > 0 \Rightarrow T_\lambda(M) = 0$
- o $T_\lambda(N) = 0$

Def: Sea $f: M \to N$ un morfismo de motivos. Entonces f es sobreyectivo si para toda variedad suave y proyectiva Z, la aplicación inducida

$$CH(M \otimes h(Z)) \longrightarrow CH(N \otimes h(Z))$$

es sobreyectivo

- Si f es sobre $f: M \to N$ y M es f.d $\Rightarrow N$ es finito dimensional

en particular si M es f.d y

$$M = N_1 \oplus N_2$$

Prop: Sea $f: M \to M$ un morfismo de motivos finito dimensional (par o impar). Entonces
(i) El morfismo f satisface $G(f)=0$, donde $G(t) \in \mathbb{Q}[t]$ algún polinomio mónico.

(ii) Si f es numéricamente trivial, entonces el morfismo f es nilpotente.

Prop: Sea M un motivo finito dimensional y $f: M \to M$ un morfismo tal que, como ciclo $f \in CH(M \otimes M)$ f es numéricamente $\equiv 0 \Rightarrow f$ es nilpotente.

Obs: $G(t)$ tiene grado $\dim(M)$ en Kimura, pero Jennsen lo refinó para $n-1$. Al igual que en el punto (ii)

Bloch alternativo / general

Teorema: Sea X una superficie algebraica sobre un cuerpo algebraicamente cerrado

$$H^2_{tr}(X) := H^2_{et}(X, \mathbb{Q}_\ell) / \mathrm{Im}\{NS(X) \otimes \mathbb{Q}_\ell \to H^2_{et}(X, \mathbb{Q}_\ell)\}$$

Si $H^2_{tr}(X) \neq 0 \Rightarrow T(X) \neq 0$ infinito dimensional en el sentido que para ninguna curva C existe $Z \in CH^2(C \times X)$ tal que $J(C) \to T(X)$

$(x - x_0) \longmapsto Z(x) - Z(x_0)$ es sobre donde $x_0 \in C$ punto fijo. Si $k = \mathbb{C}$ $H^2_{tr}(X) = 0 \iff p_g(X) = 0$.

Prop: Sea X una variedad suave con motivo de Chow finito dimensional. Si $cl: CH^*(X)\otimes_{\mathbb{Q}} K \longrightarrow H^*(K)$ es suryectivo. Entonces cl es biyectiva.

Idea: Sea $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ base del K-espacio vec. $H^*(X)$ y sea $\{\hat{\alpha}_1, \dots, \hat{\alpha}_n\}$ dual $\rightarrow$ producto ap. + Poincaré

(Por Künneth) Se tiene que

$$\sum_{i=1}^{k} \alpha_i \times \hat{\alpha}_i = \underbrace{[\Delta_X]}_{=cl(\Delta_X)} \in H^*(X\times X)$$

Como cl es sobre $\Rightarrow \exists\ \beta_i$ y $\hat{\beta}_i$ tal que

$$cl(\beta_i) = \alpha_i \quad y \quad cl(\hat{\beta}_i) = \hat{\alpha}_i$$

$$f = \sum_{i=1}^{k} \beta_i \times \hat{\beta}_i : X \vdash X \quad \Big\}\ \text{Idempotente}$$

$\in Cor^0(X,X)$ $\quad cl(\Delta_X - f) = 0 \Rightarrow$ es num. equi. a cero.

y $(\Delta_X - f)$ es nilpotente (Theorem 7.5 Kimura)

$$\Rightarrow 0 = (\Delta_X - f)^n = (\Delta_X - f) \Rightarrow \Delta_X = \sum \beta_i \times \hat{\beta}_i$$

Para cualquier $x \in CH^*(X)$ se tiene que

$$x = [\Delta_X]_* x = \sum (x\cdot\beta_i)\,\hat{\beta}_i \Rightarrow \hat{\beta}_i \text{ span}$$

el $\mathbb{Q}$ espacio vectorial $CH^*(X)$ l.i.

$\Rightarrow cl$ es biyectivo.

Corolario: Sea X una superficie con $p_g = 0$. Si el motivo es finito dimensional entonces el kernel de Albanese es cero en $CH_0(X)_{\mathbb{Z}}$. $\quad T(S) = 0$

Dem: Asumiendo $q = h^0(X, \Omega_X^1) = 0$

Conjetura: El motivo de Chow de X es finito dimensional

el mapeo de ciclos es sobreyectivo $\Rightarrow CH_0(X) = \mathbb{Q}$

$\Rightarrow$ $T(X) = \operatorname{Ker}\{alb : CH_0^{hom}(X) \to Alb(X)\}$ es torsión

Por Roitman $CH_0^{hom}(X)_{tors} \xrightarrow{\sim} Alb(X)_{tors}$

$\Rightarrow T(X)$ no tiene torsión

$\Rightarrow T(X) = 0$. $\quad$ $\boxed{h(X) \text{ es finito dim.} \Rightarrow \text{Bloch}}$

- Nota al margen. Sea X una superficie

$\Rightarrow \exists$ descomposición Chow-Künneth $\begin{cases} 0 \\ d \\ 2d-1 \\ 2d \end{cases}$

Picard

$\Rightarrow$ $h(X) = \underbrace{h^0(X)}_{\mathbb{1}} \oplus \underbrace{h^1(X)}_{(X, p_1, 0)} \oplus h^2(X) \oplus \underbrace{h^3(X)}_{\text{Albanese}} \oplus \underbrace{h^4(X)}_{\cong \mathbb{L}^2}$ $\quad h^{2d}(X) \cong \mathbb{L}^d$ $\quad h^1(X)$

$h^2(X) \to ch^2_{alg}(X) \oplus t^2(X)$ $\qquad H^i(ch^j(X)) = \begin{cases} 0 & j \neq i \\ H^i(X) & j = i \end{cases}$

tal que $H^2(t^2(X)) = H^2_{Tr}(X)$

$CH^2(t^2(X)) = T(X)_{\mathbb{Q}}$.

Como $ch(X)$ es finito dimensional $\Rightarrow t^2(X)$ es f.d.

Por hipótesis $H^2(t^2(X)) = H^2_{tr}(X) = 0 \Rightarrow p$ homológicamente equivalente a cero

(Si $(X, p, 0) =: t^2(S) \Rightarrow H^2(t^2(X)) = p_* H^2(X)$)

$\Rightarrow p$ es nilpotente $\Rightarrow p = 0$

$\Rightarrow t^2(X) = 0$

$\Rightarrow T(X) \otimes \mathbb{Q}$ es trivial

$\therefore$ Se concluye de manera similar