Seminario conjetura de Bloch

Ref: Voisin, *Bloch's conjecture for Catanese and Barlow surfaces, J. Diff. Geom. (2014)*

Conjetura de Bloch

Sea S una superficie proyectiva lisa de tipo general (K_S amplio) con $p_g = 0$ (luego $q = 0$).

$$\Rightarrow \quad \mathrm{CH}_0(S)_{hom} := \ker(\mathrm{CH}_0(S) \xrightarrow{\deg} \mathbb{Z}) = 0 \quad (\Leftrightarrow \mathrm{CH}_0(S) = \mathbb{Z})$$

- *Inose & Mizukami* (1979): **OK** para Godeaux típica

$$S = X_2^5/G \;, \qquad G = \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}.$$

- *Barlow* (1985): **OK** para superficie de Barlow, $\pi_1 = \{1\}$.
- *Kimura* (2005): **OK** si el motivo de Chow es de dimensión finita.
  - *Bauer, Catanese, Grunewald & Pignatelli* (2012): **OK** para muchos ejemplos construidos como cuocientes de productos de curvas

$$S = (C_1 \times C_2)/G.$$

1 Superficies de Catanese y Barlow

Considere el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
 & & Y = S(a) \arrow[dll, "\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}"'] \arrow[dd, "\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}"] \\
V(a) = Q \arrow[dd, "\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}"'] & & \\
 & & V = \Sigma(a) \arrow[dll, "\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}"] \arrow[dd, "\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}"] \\
W & & \\
 & & X = \Sigma'(a)
\end{tikzcd}$$

$$V(a) = \text{ superficie quíntica determinantal simétrica } \{\det(M_a) = 0\} \subseteq \mathbb{P}^3,$$
$$S(a) = \text{ parametriza los "rulings" de la cuádrica dada por } M_a, p_g = 4, K^2 = 10, \pi_1 = \{1\},$$
$$\Sigma(a) = \text{ superficie de Catanese, } p_g = 0, K^2 = 2, \pi_1 = \mathbb{Z}/5\mathbb{Z},$$
$$\Sigma'(a) = \text{ superficie de Barlow, } p_g = 0, K^2 = 1, \pi_1 = \{1\},$$
$$W = \text{ resolución minimal Godeaux, } p_g = 0, K^2 = 1, \pi_1 = \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}.$$

Para $a = (a_1 : a_2 : \cdots : a_{12}) \in B \subseteq \mathbb{P}^{11}$, donde B es el abierto tal que

$V(a) = \{\det(M_a) = 0\} \subseteq \mathbb{P}^3$ tiene sólo singularidades nodales, y

$$M_a = \begin{pmatrix} a_1x_1 & a_2x_2 & a_3x_3 & a_4x_4 & 0 \\ a_2x_2 & a_5x_3 & a_6x_4 & 0 & a_7x_1 \\ a_3x_3 & a_6x_4 & 0 & a_8x_1 & a_9x_2 \\ a_4x_4 & 0 & a_8x_1 & a_{10}x_2 & a_{11}x_3 \\ 0 & a_7x_1 & a_9x_2 & a_{11}x_3 & a_{12}x_4 \end{pmatrix}.$$

- Barlow: Para un a específico Y tiene "suficientes automorfismos" y entonces podemos aplicar Inose-Mizukami para probar Bloch en V. Luego vale tambien para X (y W) pues

  $$\mathrm{CH}_0(X)_{hom,\mathbb{Q}} \subseteq \mathrm{CH}_0(Y)_{hom,\mathbb{Q}}$$

  y además por el Teorema de Roitman $\mathrm{CH}_0(X)$ no tiene torsión.

- Voisin: Para un a genérico, basta mostrar que

  $$\overline{S \times_B S} = \text{ completación proyectiva lisa}$$

  tenga CH_0 trivial, e.g. que $\overline{S \times_B S}$ sea racionalmente conexo.

2 Preliminares

Trabajaremos en el siguiente contexto: Tenemos $S \to B$ una familia suave proyectiva de superficies conexas, con base B cuasi-proyectiva. Cada

$$\Gamma \in \mathrm{CH}^2(S \times_B S)_{\mathbb{Q}}$$

induce una 0-auto-correspondencia de S sobre B. Para cada $t \in B$ tenemos el ciclo restringido

$$\Gamma_t := \Gamma|_{S_t \times S_t} \in \mathrm{CH}^2(S_t \times S_t)_{\mathbb{Q}}$$

con clase cohomológica

$$[\Gamma_t] \in H^{2,2}(S_t \times S_t, \mathbb{Q}).$$

Ellos inducen morfismos

$$\Gamma_{t*} : \mathrm{CH}_0(S_t)_{\mathbb{Q}} \to \mathrm{CH}_0(S_t)_{\mathbb{Q}}$$
$$Z \mapsto \mathrm{pr}_{2*}(\Gamma_t \cdot \mathrm{pr}_1^* Z)$$
$$[\Gamma_t]^* : H^{i,0}(S_t) \to H^{i,0}(S_t)$$
$$\omega \mapsto \mathrm{pr}_{2*}(\mathrm{pr}_1^* \omega|_{\Gamma_t})$$

Ejemplo. Suponga que X admite una acción algebraica de un grupo finito G, entonces $\pi \in \mathbb{Q}[G]$ dado por

$$\pi = \frac{1}{|G|} \sum_g g$$

es un proyector. Su grafo induce una auto-correspondencia

$$\Gamma^\pi \in \mathrm{CH}^2(X \times X)_{\mathbb{Q}}$$

que es también un proyector $\Gamma^\pi \circ \Gamma^\pi = \Gamma^\pi$ (luego $\Gamma^\pi_* \circ \Gamma^\pi_* = \Gamma^\pi_*$ y $[\Gamma^\pi]^* \circ [\Gamma^\pi]^* = [\Gamma^\pi]^*$). Denotamos

$$\mathrm{CH}_0(X)^\pi_{hom,\mathbb{Q}} := \mathrm{Im}(\Gamma^\pi_*) \quad \text{y} \quad H^{2,0}(X)^\pi := \mathrm{Im}([\Gamma^\pi]^*).$$

Teorema (Voisin)**.** Bajo las siguientes condiciones:

(1) Las fibras S_t satisfacen que $q(S_t) = 0$ y $[\Gamma_t]^* : H^{2,0}(S_t) \to H^{2,0}(S_t)$ es cero.

(2) Una completación proyectiva lisa $\overline{S \times_B S}$ es racionalmente conexa.

Entonces $\Gamma_{t*} : \mathrm{CH}_0(S_t)_{hom} \to \mathrm{CH}_0(S_t)_{hom}$ es nilpotente para todo $t \in B$.

Corolario. Si $S \to B$ es una familia proyectiva lisa de superficies conexas con $q(S_t) = p_g(S_t) = 0$ tal que vale la condición (2) del teorema anterior, entonces

$$\mathrm{CH}_0(S_t)_{hom} = 0 \text{ para todo } t \in B.$$

Observación. Nosotros aplicaremos el teorema sobre la familia $S(a) \to a \in B$ para el proyector π del grupo $G = \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ tal que $\Sigma(a) = S(a)/G$. Como $S(a)$ es simplemente conexo y

$$H^{2,0}(S(a))^\pi = H^{2,0}(\Sigma(a)) = 0$$

se cumple la condición (1). Luego, una vez que verificamos (2) sigue que Γ^π_{t*} es nilpotente, y a la vez idempotente (por ser un proyector), es decir $\Gamma^\pi_{t*} = 0$, de donde se concluye que

$$\mathrm{CH}_0(\Sigma(a))_{hom,\mathbb{Q}} = \mathrm{CH}_0(S(a))^\pi_{hom,\mathbb{Q}} = 0.$$

3 Idea de la demostración

Lo primero es observar que la condición (1) implica que $H^1(S_t, \mathbb{Q}) = 0$ y además

$$H^{2,2}(S_t \times S_t, \mathbb{Q}) = H^{2,0}(S_t, \mathbb{Q}) \otimes H^{0,2}(S_t, \mathbb{Q}) \oplus H^{0,2}(S_t, \mathbb{Q}) \otimes H^{2,0}(S_t, \mathbb{Q})$$

$$\oplus H^{1,1}(S_t, \mathbb{Q}) \otimes H^{1,1}(S_t, \mathbb{Q}) \oplus H^{2,2}(S_t, \mathbb{Q}) \otimes H^{0,0}(S_t, \mathbb{Q}) \oplus H^{0,0}(S_t, \mathbb{Q}) \otimes H^{2,2}(S_t, \mathbb{Q}).$$

Por otro lado, como Γ_t actúa trivialmente en $H^{2,0}(S_t)$, sigue que

$$[\Gamma_t] = \left[\sum_i C_i \times D_i\right] + \mathrm{pr}_1^* \left[\sum_k P_k\right] + \mathrm{pr}_2^* \left[\sum_j Q_j\right]$$

$$= [Z_t] + \mathrm{pr}_1^*[(Z_1)_t] + \mathrm{pr}_2^*[(Z_2)_t]$$

donde Z_t está soportado en un producto de divisores de S_t y $(Z_1)_t, (Z_2)_t \in \mathrm{CH}_0(S_t)_{\mathbb{Q}}$. Usando un argumento de teorema de la categoría de Baire no es difícil globalizar esta descomposición del siguiente modo:

Lema (Prop. 3.7, Voisin, *Generalized Bloch and Hodge conjectures* (2013))**.** Existe un subconjunto algebraico cerrado de codimensión 1, $C \subseteq S$, un ciclo de codimension 2 en $S \times_B S$ con coeficientes en $\mathbb{Q}$ soportado en $C \times_B C$, y dos ciclos de codimensión 2, Z_1, Z_2 en S con coeficientes en $\mathbb{Q}$, tales que

$$[(\Gamma - Z - \mathrm{pr}_1^* Z_1 - \mathrm{pr}_2^* Z_2)_t] = 0 \qquad \forall t \in B.$$

Observación. Un hecho fundamental en el lema anterior es usar coeficientes $\mathbb{Q}$. En general, si nos restringimos a $\mathbb{Z}$ el resultado anterior sólo valdría salvo un cambio de base $B' \to B$, pero esto arruinaría la condición (2).

El siguiente paso es llevar el anulamiento cohomológico fibra a fibra a un anulamiento global. Analizando la secuencia espectral de Leray de la familia $p : S \times_B S \to B$ vemos que la clase $[\Gamma - Z - \mathrm{pr}_1^* Z_1 - \mathrm{pr}_2^* Z_2]$ se anula en el cuociente $E^{0,4} = H^0(B, R^4 p_* \mathbb{Q})$ de $H^4(S \times_B S, \mathbb{Q})$. Usando esto se puede mostrar que entonces dicha clase es de la forma $\mathrm{pr}_1^* \alpha_1 + \mathrm{pr}_2^* \alpha_2$ para $\alpha_1, \alpha_2 \in H^4(S, \mathbb{Q})$ y luego uno prueba que dichas clases son algebraicas. Esto nos lleva al siguiente resultado.

Lema (Lemma 3.12, Voisin, *Generalized Bloch and Hodge conjectures* (2013))**.** Existen ciclos algebraicos de codimensión 2, Z_1', Z_2' en S con coeficientes en $\mathbb{Q}$ tales que

$$[\Gamma - Z - \mathrm{pr}_1^* Z_1' - \mathrm{pr}_2^* Z_2'] = 0 \in H^4(S \times_B S, \mathbb{Q}).$$

Finalmente la condición (2) entra en el resultado siguiente:

Proposición (Prop. 1.3)**.** Bajo la condición (2) vale lo siguiente:

(i) El ciclo de codimensión 2, $Z' := \Gamma - Z - \mathrm{pr}_1^* Z_1' - \mathrm{pr}_2^* Z_2'$ es algebraicamente equivalente a 0 en $S \times_B S$.

(ii) La restricción a las fibras $S_t \times S_t$ del ciclo Z' es un elemento nilpotente de $\mathrm{CH}^2(S_t \times S_t)_{\mathbb{Q}}$.

Observación. Notamos que el item (ii) prueba lo que queremos ya que como $Z + \mathrm{pr}_1^* Z_1' + \mathrm{pr}_2^* Z_2'$ actúa trivialmente en $\mathrm{CH}_0(S_t)_{hom,\mathbb{Q}}$, sigue que $\Gamma_{t*} = Z'_{t*}$ es nilpotente. Por otro lado, el item (i) implica el (ii) ya que las auto-correspondencias algebraicamente equivalentes a 0 son nilpotentes (ver e.g. 2.3.1, Voisin, *Remarks on zero-cycles of sefl-products of varieties*).

Demostración: Nos basta mostrar (i). Para esto usamos el siguiente resultado clásico de Bloch & Srinivas (*Remarks on correspondences and algebraic cycles, Amer. J. of Math.* (1983)):

"Sea X una variedad proyectiva lisa con $\mathrm{CH}_0(X)$ soportado en una superficie $\Sigma \subseteq X$.
Entonces los ciclos de codimensión 2 de X que son cohomólogos a 0,
son algebraicamente equivalentes a 0".

Para aplicarlo, sólo nos falta llevar todo a una buena completación proyectiva lisa de $S \times_B S$. **Vemos que la condición que $\overline{S \times_B S}$ sea racionalmente conexo se usa para asegurar que $\mathbf{CH}_0(\overline{S \times_B S})$ está soportado en una superficie**. Al extender Z' a $\overline{Z'}$ obtenemos un ciclo que está soportado sólo en el divisor al infinito $\overline{S \times_B S} \setminus (S \times_B S)$, luego a menos de restar un ciclo soportado al infinito

$$[\overline{Z'}] = 0 \in H^4(\overline{S \times_B S}, \mathbb{Q})$$

y $\overline{Z'}|_{S \times_B S} = Z'$. Por lo tanto, como $\overline{Z'}$ es algebraicamente equivalente a 0, lo mismo vale para Z'. ■

Referencias

- Barlow. *Rational equivalence of zero cycles for some more surfaces with $p_g = 0$, Invent. Math.* (1985).
- Bloch & Srinivas. *Remarks on correspondences and algebraic cycles, Amer. J. of Math.* (1983).
- Voisin. *The generalized Bloch and Hodge conjectures are equivalent for general complete intersections, Ann. Sci. de L'ENS.* (2013).
- Voisin. *Bloch's conjecture for Catanese and Barlow surfaces, J. Diff. Geom.* (2014).