Reconstrucción II (Sebastián Eterovic) 24/10/2014 1

X = var. proy. nosing. sobre k

<u>Lema</u>: Sea $\mathcal{F}^\circ \in D^b_{coh}(X)$ y supongamos que $\operatorname{supp}\mathcal{F}^\circ = Z_1 \cup Z_2$, $Z_1, Z_2 \subseteq X$ cerrados disj $\Rightarrow$ $\mathcal{F}^\circ = \mathcal{F}_1^\circ \oplus \mathcal{F}_2^\circ$
con $\operatorname{supp}(\mathcal{F}_i^\circ) \subseteq Z_i$, $i=1,2$.

<u>Lema</u>: Si $\mathcal{F}^\circ \in D^b_{coh}(X)$ con $\operatorname{Hom}(\mathcal{F}^\circ, \mathcal{F}^\circ) = k(\mathcal{F}^\circ)$ cuerpo,
dim Sup $\mathcal{F}^\circ = 0$ y $\operatorname{Hom}(\mathcal{F}^\circ, \mathcal{F}^\circ[i]) = 0$ $\forall i<0$
$\Rightarrow$ $\mathcal{F}^\circ \simeq k(x)[m]$ $\forall x \in X$ cerrado $m \in \mathbb{Z}$.

<u>Dem</u>: $\mathcal{H}^i$: $m_0 = \max\{i / \mathcal{H}^i \neq 0\}$ $m_1 = \min\{i / \mathcal{H}^i \neq 0\}$
$\mathcal{H}^{m_0} \longrightarrow \mathcal{H}^{m_1}$ no trivial (por el punto)
$\mathcal{F}^\circ[m_0] \longrightarrow \mathcal{H}^{m_0} \longrightarrow \mathcal{H}^{m_1} \longrightarrow \mathcal{F}^\circ[m_1]$
pero por $\operatorname{Hom}(\mathcal{F}^\circ, \mathcal{F}^\circ[i]) = 0$ $\Rightarrow$ $m_0 = m_1$ ∎

<u>Prop</u>: X var. proyect. suave tal que ω_X es (amplio) (anti-amplio). Los point objects en $D^b_{coh}(X)$ son los objetos que son isomorfos a $k(x)[m]$ $x \in X$ cerrado, $m \in \mathbb{Z}$.

<u>Def</u>: Un objeto L en $D^b_{coh}(X)$ es <u>invertible</u> si para todo point object $P \in D^b_{coh}(X)$ existe $n_P \in \mathbb{Z}$ tal que
i) $\operatorname{Hom}^{n_P}(L, P) = k(P)$
ii) $\operatorname{Hom}^i(L,P) = 0$ si $i \neq n_P$

$\left(\operatorname{Hom}^{n_P} = \operatorname{Ext}^{n_P} := \operatorname{Hom}_D(\ , \ [n_P])\right)$

<u>Prop</u>: Sea X variedad proy. suave. Todo objeto invertible de $D^b_{coh}(X)$ es de la forma $L[m]$, con L un line-bundle en X, $m \in \mathbb{Z}$.
Conversamente, si ω_X es (anti)-amplio, entonces para todo line bundle L y $m \in \mathbb{Z}$, $L[m] \in D^b_{coh}(X)$ es invertible.

Dem: Sea L invertible. Sea m maximal tal que $\mathcal{H}^m = \mathcal{H}^m(L) \neq 0$.
Existe un morfismo natural $L \to \mathcal{H}^m[-m]$ que induce la identidad en la m^{ta} cohom.
Sea $x_0 \in Supp(\mathcal{H}^m)$ entonces existe $\mathcal{H}^m \to k(x_0)$ no trivial
$0 \neq Hom(\mathcal{H}^m, k(x_0)) = Hom(L, k(x_0)[-m])$
$\Rightarrow Hom^j(L, k(x_0)) = \begin{cases} \neq 0, & j = -m \\ 0, & \text{sino} \end{cases}$ $\quad n_{k(x_0)} = -m$.

sucesión espectral $\Rightarrow \mathcal{H}^m$ es libre en $x_0 \in X$ y como $\mathcal{H}^m \to k(x)$, $\forall x \in X$
$\Rightarrow \mathcal{H}^m$ es line bundle, ...

Conversamente, sea L es line bundle en X. Asumir K_X o $-K_X$ amplio $\Rightarrow$ point obj son $k(x)[m]$, $x \in X$, $m \in \mathbb{Z}$.

$$Hom(L[m], P[i]) \cong Hom(L[m], k(x)[i+n]) = Hom(\mathcal{O}_X, L^*(x)[i+n-m])$$
$$\cong H^{i+n-m}(X, L^*(x)) = \begin{cases} k(x), & i = m-n \\ 0, & \text{sino} \end{cases}$$

Prop: X, Y variedades proy. suaves sobre k. Si $D^b_{coh}(X) \cong D^b_{coh}(Y)$, entonces $\dim X = \dim Y$, y ω_X y ω_Y tienen en mismo orden.

Prop: X, Y var. proy. suaves, ω_X (anti)-amplio. Si $D^b_{coh}(X) \overset{F}{\cong} D^b_{coh}(Y)$, entonces X e Y son isomorfos. En particular ω_Y es (anti)-amplio.

$\to$ Primero se demuestra $F(\mathcal{O}_X) = \mathcal{O}_Y$, ω_Y (anti)amplio, $F(\omega_X^i) = \omega_Y^i$
$H^0(X, \omega_X^i) = H^0(Y, \omega_Y^i) \Rightarrow \bigoplus H^0(X, \omega_X^i) \cong \bigoplus H^0(Y, \omega_Y^i)$
ω_Y es (anti)amplio $X = Proj(\bigoplus H^0(X, \omega_X^i)) = Proj(\bigoplus H^0(X, \omega_Y^i)) = Y$.
$\{\text{Point obj in } D^b_{coh}(X)\} \leftrightarrow \{\text{poin obj in } D^b_{coh}(Y)\}$ $\quad \{\text{inv. } D^b_{coh}(X)\} \leftrightarrow \{\text{inv. } D^b_{coh}(Y)\}$
$\{k(x)[m]\}$ $\quad \{k(y)[m]\}$ $\quad \{L[m]\}$ $\quad \{L[m]\}$

∴ se prueba $\exists j$ tal que ω^j separa puntos y tangentes a través de cohomología ....