Construcción de Cho-Lee después de Vial y Hacking

12-11-19 Gijón (4)

Teorema (Vial 2017) X como en el teorema anterior.

$(E_0, E_1, \dots, E_{n+1})$ de n. line bundles con $n = \rho(X)$ $\iff$ $K_X^2 = 10-\rho$ y ★
- $NS(X) = \langle H \rangle$ $H^2 = 1$, $K_X = 3D$ algún D primitivo
- $NS(X) = \mathbb{Z}D_1 + \mathbb{Z}D_2$ $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $K_X = 2D$ " " "
- $NS(X) = 1 \oplus (-1)^{\rho-1}$ $\exists D$ con D^2 impar, $\rho \geq 2$, K_X primitivo.

$\exists D_1, \dots, D_{n+1}$ trigonal en el sentido anterior (con $K \cdot e_i = -e_i^2 - 2$)

obs: $\exists$ $\mathbb{Z}$-base $(e_1, \dots, e_n)$ $\begin{bmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & -1 \end{bmatrix}$ $\Rightarrow$ $e_i' = e_i - e_{i+1}$ $1 \leq i < n$ y $e_n' = e_n$ es $\mathbb{Z}$-base trigonal en el sentido anterior con $\begin{bmatrix} 0 & 1 & & \\ 1 & 0 & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & 1 \\ & & 1 & -1 \end{bmatrix}$, $Ke_i' = -e_i'^2 - 2$ $\forall i$.

$n = \rho$

Receta

obs) $\exists$ base $D_1, \dots, D_n$ tal que $K_X = D_1 + \dots + D_{n-1} - 3D_n$, $D_i \cdot D_j = 0$ $i \neq j$ $D_i^2 = -1$ $i \leq n-1$ y $D_n^2 = 1$. Definir $D_{n+1} = 2D_n$ $\Rightarrow$ $(\mathcal{O}_X, \mathcal{O}_X(D_1), \dots, \mathcal{O}_X(D_{n+1}))$ es una c.e.n.

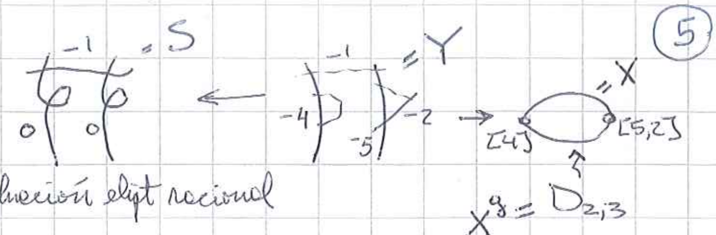
II **Teorema**: $\mathbb{P}^2 \leftarrow Bl_{n-1}(\mathbb{P}^2) = X$ con excepcionales $E_1, \dots, E_{n-1}$. Luego $E_1, \dots, E_{n-1}, H$ es base ortog de $NS(X)$ $\begin{bmatrix} -1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{bmatrix}$ y $K_X = E_1 + \dots + E_{n-1} - 3H$ y $(\mathcal{O}, \mathcal{O}(E_1), \dots, \mathcal{O}(E_{n-1}), \mathcal{O}(H), \mathcal{O}(2H))$ es colección excepcional full.

Teorema (Vial 2017) X con $p_g = q = 0$. Si X no es minimal $\Rightarrow$ siempre existe una c.e.n. con n. line bundles. Si X es minimal: ★ ok trivialmente
1. (1) $\kappa = -\infty$ $\Rightarrow$ racional y siempre hay. ok
2. (2) $\kappa = 0$ $\Rightarrow$ Enriques y nunca hay.
3. (3) $\kappa = 1$ $\Rightarrow$ Los únicos que tienen son $D_{2,3}$, $D_{2,4}$, $D_{3,3}$, $D_{2,2,2}$. } ★ chequear clase canónica y primitivo
4. (4) $\kappa = 2$ $\Rightarrow$ siempre hay. ★ restricciones fuertes en $NS(X)$ $\rho \leq 9$ $\stackrel{?}{=} H^2(S, \mathbb{Z})/\text{torsión}$ (y así unimod Poinc. dual)

Teo (Cho-Lee 2018): A través de $\mathbb{Q}$-Gorenstein smoothing & RECETA se puede mostrar existencia de c.e. de largo máximo 12 en $D_{2,3}$ con Fantasma.

Teo (Cho 2019): c.e. largo máximo en Bl_1(Enriques) con casi-Fantasma.

Para la construcción de $D_{2,3}$ tomamos



$= S$ ← $= Y$ → $= X$, $X^g = D_{2,3}$

[En mi paper "Identifying..." §4 ver construcción] → fibración elípt racional

Prop [Manetti, Lemma 2 Crelle '91]: Dada $\begin{matrix} X \subset \mathcal{X} \\ \downarrow \quad \downarrow \\ 0 \in \mathbb{D}\end{matrix}$ smoothing cualquiera con $h^1(\mathcal{O}_X)=h^2(\mathcal{O}_X)=0$, la restricción en cohomología $H^2(\mathcal{X},\mathbb{Z})\to H^2(\mathcal{X}_t,\mathbb{Z})$ induce $\mathrm{Pic}(\mathcal{X})\hookrightarrow \mathrm{Pic}(\mathcal{X}_t)$, la cual es un isomorfismo en $t=0$, i.e., tenemos $\mathrm{Pic}(X)\hookrightarrow \mathrm{Pic}(\mathcal{X}_t)$.

[levantamiento de line bundles] [X retracto de $\mathcal{X}$ y así $H^2(\mathcal{X},\mathbb{Z})\xrightarrow{\sim} H^2(X,\mathbb{Z})$ y sucesión exponencial.]

Así, una manera sería levantar SODs desde Y, pero no es claro como. Típicamente la imagen de divisores en Y a X no es Cartier.

Ej1.- En S tenemos es SOD $\langle \mathcal{O}, \mathcal{O}(E_1), \dots, \mathcal{O}(E_9), \mathcal{O}(H), \mathcal{O}(2H)\rangle$ que se puede llevar a $\langle \underbrace{\mathcal{O}, \mathcal{O}(E_1-E_9), \dots, \mathcal{O}(E_8-E_9)}_{\text{luego es levantable}}, \underbrace{\mathcal{O}(H-E_9), \mathcal{O}(2H-E_9), \mathcal{O}(-E_9-K)}_{\text{no lo es}}\rangle$

Una mejor idea es romper la superficie X

(1) Considerar localmente $\mathbb{Q}$-Gorenstein smoothings $(w^n + t^a = uv)\subset \mathbb{C}^3/\frac{1}{n}(1,-1,a)\times\mathbb{C}$ (notar) y luego considerar la familia $X\subset\mathcal{X}\to 0\in\mathbb{D}$

(2) Se considera blow-up con pesos $\frac{1}{n}(1, na-1, a, n)$ en ambas singularidades.
El efecto en la singularidad: W $\tilde{X}$ → $\frac{1}{n^2}(1, na-1)$ X

$C \simeq \mathbb{P}^1$

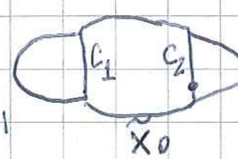
$(t=0)\subset W = (w^n + t^a = uv) \subset \mathbb{P}(\underset{u}{1}, \underset{v}{na-1}, \underset{w}{a}, \underset{t}{n})$

Si $\frac{n^2}{na-1} = [b_1, \dots, b_s]$ ⇒ Para $\tilde{X}$ tenemos $[b_2,\dots,b_s]$ → $[b_1,\dots,b_s]$

y para W $\frac{1}{na-1}(1,-n^2)$, $\tilde{X}$, $\frac{1}{na-1}(1,n^2)$ localmente $(xy=0)\subset \frac{1}{na-1}(1,-1,n^2)$

Notar juego geométrico: $(xy = zw^{na-1} + t) \subset \frac{1}{na-1}(1,-1,n^2)\times\mathbb{C}_t$
y la suavización $t=0$, $w\to 0$ ∴ Wahl $\frac{1}{(na-1)^2}(1, n^2(na-1)-1)$ ⇝ W, $\tilde{X}$

(3) Tenemos en nuestro caso:



C_1, C_2, $W_2 = \tilde{\mathcal{X}}_0 \subset \tilde{\mathcal{X}}$

$C_2\cdot(n-1)\mathcal{O}(1) = n$ $\quad \mathbb{P}^2 = W_1$ $\quad \tilde{X}_0$ $\quad W_2 \simeq \mathbb{P}(1,n-1,1)\supset C_2 = (w^n = uv)$

⇒ necesitamos mult. de n

$Y \to \tilde{X}_0$, $Y \downarrow X$, $X \leftarrow \tilde{X}_0$

(4) Si $D \in Pic(Y)$ tal que $D.C_1 = 2d_1$, $D.C_2 = nd_2$, $D.E_i = 0$ $\forall d_j \in \mathbb{Z}$ para $(i = 2, \dots, r)$ [Caso General] [$\Rightarrow$ levantamiento de $D \subset X$ en X^g]
$\exists$ $\tilde{D}$ line bundle en $\tilde{X}_0 = \tilde{X}_0 \cup W_1 \cup W_2$ tal que
$\tilde{D}|_{\tilde{X}_0} \simeq \mathcal{O}_{\tilde{X}_0}(i_* D)$, $\tilde{D}|_{W_1} \simeq \mathcal{O}_{W_1}(d_1)$, $\tilde{D}|_{W_2} \simeq \mathcal{O}_{W_2}((n-1)d_2)$.

y
(*) $0 \to \tilde{D} \to \tilde{D}/_{\tilde{X}_0} \oplus \tilde{D}/_{W_1} \oplus \tilde{D}/_{W_2} \to \tilde{D}|_{Z_1} \oplus \tilde{D}|_{Z_2} \to 0$ [Sucesión exacta que define vector bundles]

Se verifica que son excepcionales por "Cohomología racional". Tenemos levantamiento D^g y coincide con el de $i_* D$.

(5) - Tenemos $\mathcal{O}, \mathcal{O}(F_1 - F_9), \mathcal{O}(F_2 - F_9), \dots, \mathcal{O}(F_8 - F_9)$ c.e. con $F_i = (-1)$-curvas.
- Resulta que $\mathcal{O}(F_1 - F_9), \mathcal{O}(F_2 - F_9), \dots, \mathcal{O}(F_8 - F_9), K$ lo es también en este caso
- Todos estos tienen levantamiento $F_{19}^g, \dots, F_{89}^g, K_{X^g}$ y así numericamente serán n.e.c. en X^g.
- Luego definir $G_i^g := -L^g + 10 K_{X^g} + F_{i9}^g$ $i = 1, \dots, 8$
$G_9^g := -L^g + 11 K_{X^g}$ [Tensorizar por line bundle adecuado]

donde $L = 2H$ y L^g es el levantamiento. Se pueden calcular intersecciones y así $(L^g)^2 = 21$, $(L^g.K) = -1$. En efecto $(G_i^g)^2 = -1$ $\forall i$ y $(G_i^g G_j^g) = 0$ $i \neq j$

- Hacia Vial: Definir $G_{10}^g := \frac{1}{3}(G_1^g + \dots + G_9^g - K_{X^g})$ y mostrar que es l.b.
En efecto $G_{10}^g = -3L^g + \underbrace{(H - 3F_9)^g}_{\text{l.b.}} + 28 K_{X^g}$ y $G_{10}^g = 1$ y tenemos Vial.
$\Rightarrow$ $\mathcal{O}, G_1^g, \dots, G_{10}^g, G_{11}^g = 2G_{10}^g$ forman una n.e.c.

- Luego se muestra que es en efecto una col. excep.. Para eso notar que sólo necesitamos h^0 ya que $\chi = 0$ y dualidad de Serre.
- Pero $D \leftarrow D^g$ con las condiciones de arriba $\Rightarrow h^0(X^g, D^g) \leq h^0(\tilde{D}) = h^0(Y, D)$ por (*) y calculo en Lemma 5.3. Luego es calcular en Y con D y se hace caso a caso y da! Se calculan de hecho todos los Ext

(6) Fantasma: Kuznetsov "Height of e.c. and Hochschild cohom. of quasi-Phantom cat" da un criterio para $A \neq 0$ a través de pseudo-alturas $h = ph(E_1, \dots, E_n)$ las cuales son estimables explicitamente tal que $HH^k(X) \xrightarrow{\sim} HH^k(A)$ si $k \leq h-2$ y $HH^k(X) \hookrightarrow HH^k(A)$ $k = h-1$.
Muestran que $h = 4$ y así por ejemplo $HH^0(A) = \mathbb{C}$. [Tiene que ver con morfismos $Hom(E_i, E_j[p])$ $i < j$]