NOTAS: FECHA 26 / 11 / 19 /

(1)

S. Torres : Ventanas en $D^b(X//G)$

→ Si $\{G_\alpha\}$ generan $D^b(X) \Rightarrow \{G_\alpha|_U\}$ generan $D^b(U)$, $U \subset X$ abierto.

Se usa para $\mathbb{P}^n = \mathbb{A}^{n+1} \setminus 0 / \mathbb{G}_m \hookrightarrow \mathbb{A}^{n+1}/\mathbb{G}_m$ stack, probando que $D^b(\mathbb{P}^n) = \langle \mathcal{O}, \mathcal{O}(1), \ldots, \mathcal{O}(n) \rangle$.

→ Explicaremos siguiente resultado:

Como encontrar $C \subseteq D^b([X/G])$ $\quad C =$ ventana

$$C \xrightarrow{\sim} D^b([X^{ss}/G])$$

⇔ Cuando una colección excep desciende a una colección exc.

→ GIT : $X \curvearrowleft G$ (G reductivo ⇔ $D^b(pt/G)$ es semi-simple)

$X = \operatorname{Proj} R$, $R \curvearrowleft G \Rightarrow X/\!/_{GIT}\, G = \operatorname{Proj} R^G$

$$\operatorname{Proj} R \dashrightarrow \operatorname{Proj} R^G = X/\!/G = X^{ss}/\!/G$$

$$\operatorname{Proj} R \supset X^{ss} \xrightarrow{\pi} \operatorname{Proj} R^G, \quad X^{ss} \supset X^s$$

En la mayoría de nuestros ejemplos diremos $G \curvearrowright X^{ss}$ libre ($D^b([X^{ss}/G] = D^b(X^{ss}/\!/G)$)

→ Criterio de Hilbert-Mumford.

Sea $L \in \operatorname{Pic}_G X$ la linearización ($L \curvearrowleft G$). Supongamos $\lambda : \mathbb{G}_m \hookrightarrow G$ es un grupo 1-paramétrico

Si $y \in X^\lambda \Rightarrow \lambda \curvearrowright L_y$ (fibra) $\lambda(t) = t^d$

<u>Def</u>: $d := \operatorname{weight}_\lambda(L_y)$.

<u>obs</u>: Si $x \in X$ tal que $\lim_{t\to 0} \lambda(t)x = y$ existe $\Rightarrow y \in X^\lambda$.

<u>Thm</u> (H-M) $x \in X^{ss} \Leftrightarrow \operatorname{weight}_\lambda L_y \geq 0$
$\forall \lambda$ tal que $y = \lim_{t\to 0} \lambda(t)x$ existe

NOTAS: FECHA / / /

2

Estratificación de Kempf-Ness.

Cómo construir el locus inestable: Dado $\lambda: \mathbb{G}_m \hookrightarrow G$, $Z \subseteq X^{\lambda}$ componente conexa $Y := \{x \,/\, \lim_{t\to 0} \lambda(t)x \in Z\}$

$$\mu(\lambda, Z) = \frac{-\text{weight}_\lambda L|_Z}{|\lambda|}$$

Algoritmo: Maximizar $\mu(\lambda,Z)$ (>0) en un λ_α, Z_α

$Y_\alpha^\circ = Y_\alpha \setminus$ estratos anteriores $\quad S_\alpha := G\cdot Y_\alpha^\circ$

$\Rightarrow$ se obtiene $S_0, S_1, S_2, \ldots$ estratos

$X^{ins} = S_0 \sqcup S_1 \sqcup \ldots$

Ejemplo: $X = (\mathbb{P}^1)^n \circlearrowleft PGL_2$, $L = \mathcal{O}(d_1,\ldots,d_n)$

$(\mathbb{P}^1)^n /\!/_{\mathcal{O}(d_1,\ldots,d_n)} PGL_2 \qquad X^{ins} = ? \qquad \lambda: \mathbb{G}_m \to PGL_2$, $t \mapsto \begin{bmatrix} t & 0 \\ 0 & t^{-1} \end{bmatrix}$ suficiente para

X^λ = locus fijo por λ = $\{$ pts (comb. de $\underbrace{[0,1]}_{i\notin I}$ y $\underbrace{[1,0]}_{i\in I}$) $= Z_I \}$

$I \subseteq \{1,\ldots,n\}$

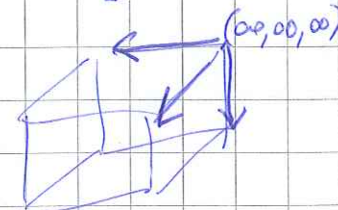
$\text{weight}_\lambda L|_{Z_I} = \sum_{i\notin I} d_i - \sum_{i\in I} d_i$

$\mu(\lambda,Z) = \sum_{i\in I} d_i - \sum_{i\notin I} d_i$. $\mu(\lambda,Z)$ se maximiza cuando $I=\{1,\ldots,n\}$

$Z_I = (\infty,\ldots,\infty) \quad Y_I = \{x \,/\, \lim_{t\to 0} \lambda(t)x = Z_I\} = Z_I$

Maximizar $\mu(\lambda,Z)$ descontando $Z_{\{1,\ldots,n\}}$.

otros casos se ven sacando 1 coord ∞, etc.



$\therefore$ $S_0 = \{(z,\ldots,z)\} = G\cdot(\infty,\ldots,\infty)$

$S_1 = \{\underbrace{(z,\ldots,z,w)}_{z\neq w}\} = G\cdot(\infty,\ldots,\infty,0)$

$\therefore$ $X^{ins} = \{(p_1,\ldots,p_n) \,/\, p_i = p_j \ \forall i\in I$ tq $\sum_{i\in I} d_i - \sum_{i\notin I} d_i > 0$
& $p_i \neq p_j \quad i\in I, j\notin I \}$

Defn $\eta_\alpha := \text{weight}_{\lambda_\alpha} \det(N^\vee_{S_\alpha} X) > 0$

Ej: $A^{n+1} \curvearrowleft \mathbb{C}^*$ $\Rightarrow \eta = n+1$, en $(\mathbb{P}^1)^n \curvearrowleft PGL_2$, $\eta_I = 2(|I|-1)$.

Thm (Teleman) $^{\text{eqs}}$

Sea $\mathcal{F} \in D^b([X/G])$ un v.b. que restringe a un $\mathcal{F} \in D^b([X^{ss}/G])$.
Tomemos una estratificación K-N $X^{ins} = S_0 \sqcup S_1 \sqcup \ldots \sqcup S_r$.

y miremos los pesos $\text{weight}_{\lambda_\alpha} \mathcal{F}|_{Z_\alpha}$. Si todos estos pesos son $< \eta_\alpha$ $\forall \alpha$
$$\Rightarrow H^i([X^{ss}/G], \mathcal{F}) = H^i(X, \mathcal{F})^G.$$

Ej: $Ext^i(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(k), \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(m)) = H^i(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(m-k))$

Tenemos $\mathbb{P}^n = A^{n+1} \setminus 0/\mathbb{C}^* \hookrightarrow A^{n+1}/\mathbb{C}^*$ $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(m-k)$ es la rest. de $\mathcal{O}(m-k)$
en A^{n+1}/G. $(A^{n+1})^{ins} = \text{pto}$, $\lambda : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}^*$ $t \mapsto t^{-1}$
$\text{weight}_\lambda \mathcal{O}(j) = -j \Rightarrow wt_\lambda \mathcal{O}(m-k) = k-m$

Podemos ocupar Teleman si $k-m < n+1$.
Si $k-m < m+1 \Rightarrow H^i(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}(m-k)) = H^i(A^{n+1}, —)^G = 0$ (ojo!)
Si $k > m$ $= 0$ $\forall i$

Ej: $(\mathbb{P}^1)^n \curvearrowleft PGL_2$ $\quad (\mathbb{P}^1)^n /\!/_{\mathcal{O}(d_1,\ldots,d_n)} PGL_2 = Y$ suponer no hay sss (cociente suave)

$\forall L$ amplio en Y $\quad H^{>0}(Y, \Omega^j \otimes L) = 0$ $\forall j$ [Variedades Tóricas satisfacen, $M_{0,5}$, some K3 surfaces "Bott Vanishing" Totaro]

Teorema (Halpern-Leistner) $X \curvearrowleft G$, $X/\!/_L G$ con estratificación emba

$C_W \subseteq D^b([X/G])$, donde $w = (w_\alpha)$, $w_\alpha \in \mathbb{Z}$
$\overset{\shortparallel}{\{} F^\bullet \mid w_\alpha \leq wts_{\lambda_\alpha} F^\bullet|_{Z_\alpha} < w_\alpha + \eta_\alpha \} \Rightarrow$

$$\begin{array}{c} C_W \subseteq D^b([X/G]) \\ \searrow \sim \\ D^b([X^{ss}/G]) \end{array}$$ equiv. de Cat.

es equiv de categorías,