Sebastián Torres : Categoría derivada 27/Agosto/2019

$\mathcal{A} = Coh(X)$ obj: haces coherentes, morf.: morf. de haces coh. Tesis de Verdier
es una categoría abeliana.

categoría $D(\mathcal{A})$: obj = complejos $\cdots \xrightarrow{d} F^{r-1} \xrightarrow{d} F^{r} \xrightarrow{d} F^{r+1} \xrightarrow{d} \cdots$ $d^2=0$
morf = morfismos de complejos + inversos de todos los cuasi-morf.

ie, $F^\circ \xrightarrow{s} G^\circ$ morfismo de complejos en $Com(\mathcal{A})$ tq $s: H^i(F) \xrightarrow{\sim} H^i(G)$ se llama cuasi-isomorfismo.

Ingrediente principal para invertir cuasi-isom:

$$\begin{tikzcd} & H^\circ \arrow[dl, "s"'] \arrow[dr, "t"] & \\ F^\circ \arrow[rr, dashed, "t\circ s^{-1}"'] & & G^\circ \end{tikzcd}$$

$t\circ s^{-1}$ morfismo en $D(\mathcal{A})$ por definición $Mor_{D(\mathcal{A})}(F^\circ, G^\circ) = \{ t\circ s^{-1} \}$

Lema: $\begin{tikzcd} H^\circ \arrow[dr] & & V^\circ \arrow[dl, "s"] \\ & G^\circ & \end{tikzcd}$ con s = qiso $\Rightarrow \exists$ $\begin{tikzcd} & U^\circ \arrow[dl, "s'"'] \arrow[dr] & \\ H^\circ \arrow[dr] & G & V^\circ \arrow[dl, "s"] \\ & G^\circ & \end{tikzcd}$ s' = qis.

En realidad: $\mathcal{A}$ = cat. abeliana $\rightsquigarrow Com(\mathcal{A}) \rightsquigarrow K(\mathcal{A})$ obj: complejos
cat. de homotopía mor: morf. $Com/\sim_{homot}$
$\rightsquigarrow D(\mathcal{A})$

Def.- $f, g \in Mor_{Com(\mathcal{A})}(F^\circ, G^\circ)$ son homotópicos si $\exists H$

$$\begin{tikzcd} \arrow[r] & F^r \arrow[r] \arrow[dl] \arrow[d, "f"', shift right] \arrow[d, "g", shift left] & F^{r+1} \arrow[r] \arrow[dl] \arrow[d, "f"', shift right] \arrow[d, "g", shift left] & {} \arrow[dl, "h"] \\ \arrow[r] & G^r \arrow[r] & G^{r+1} \arrow[r] & {} \end{tikzcd}$$

$hd + dh = f - g$.

Def: $\mathcal{A}$ categoría triangulada es una categoría aditiva con una autoequivalencia $\mathcal{A} \xrightarrow{T} \mathcal{A}$, $T(F) = F[1]$ y con una clase de "triángulos distinguidos":

$$A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \xrightarrow{h} A[1]$$

tal que el conj de Δ distinguidos (exactos) satisface 4 axiomas.

(1) $A \xrightarrow{1\!\!1} A \longrightarrow 0 \longrightarrow A[1]$ es exacto

(2) $\underbrace{A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \xrightarrow{h} A[1]}_{\text{exacto}} \Rightarrow \underbrace{B \xrightarrow{g} C \xrightarrow{h} A[1] \xrightarrow{f[1]} B[1]}_{\text{exacto}}$

(3) Si tengo $A \xrightarrow{f} B$ $\exists$ $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \xrightarrow{h} A[1]$ exacto.

(4) Axioma del octaedro.

Se deduce que
$$\begin{tikzcd} A \arrow[r] \arrow[d, "f"'] & B \arrow[r] \arrow[d, "g"] & C \arrow[r] \arrow[d, dotted, "\exists"] & A[1] \\ A' \arrow[r] & B' \arrow[r] & C' \arrow[r] & A'[1] \end{tikzcd}$$

→ En el caso de $D(\mathcal{A})$, $[1] : D(\mathcal{A}) \to D(\mathcal{A})$ está dado por $(F^\bullet, d) \in D(\mathcal{A})$, $F^\bullet[1] := (F^{\bullet+1}, -d)$

Los triángulos exactos so aquellos que vienen de
$$A^\bullet \xrightarrow{f} B^\bullet \longrightarrow C^\bullet(f) \longrightarrow A^\bullet[1]$$

$C^\bullet(f)$ es definido : $\cdots \begin{matrix} A^i \\ \oplus \\ B^{i-1} \end{matrix} \begin{matrix} \xrightarrow{-d} \\ \xrightarrow{f} \\ \xrightarrow[d]{} \end{matrix} \begin{matrix} A^{i+1} \\ \oplus \\ B^i \end{matrix} \cdots \begin{bmatrix} -d & 0 \\ f & d \end{bmatrix}$

Importante: Si $0 \to A \to B \to C \to 0$ exacto en $\mathcal{A}$
$\Rightarrow A \to B \to C \to A[1]$ exacto en $D(\mathcal{A})$

Primero $\exists\, \delta$ (según diags)
$$\begin{tikzcd} A \arrow[r] \arrow[d, leftrightarrow] & B \arrow[r] \arrow[d, leftrightarrow] & C \arrow[r] & A[1] \\ A \arrow[r] & B \arrow[r] & C(f) \arrow[r] \arrow[u] & A[1] \end{tikzcd}$$

Prop: Si $A \to B \to C \to A[1]$ es exacto
$\Rightarrow \quad \cdots \to \mathrm{Mor}(X, C[-1]) \to \mathrm{Mor}(X, A) \to \mathrm{Mor}(X, B) \to \mathrm{Mor}(X, C) \to \cdots$
es una sucesión exacta de grupos abelianos $\forall X \in D(\mathcal{A})$

$D^b(\mathcal{A})$ = Cat. der de $\mathcal{A}$ acotada ; obj = $\cdots \to 0 \to \cdots \to F^r \to \cdots \to 0 \to 0 \cdots$
y lo mismo

$D^+(\mathcal{A})$: $\to 0 \to \cdots \to F^r \to \cdots$

$D^-(\mathcal{A})$: $\to F^r \to \cdots \to 0 \to \cdots$

Def.- Sea D categoría triangulada decimos $D = \langle D_1, D_2 \rangle$ es una S.O.D. si $D_1, D_2 \subset D$ subcateg. triang. full tal que

(1) $\mathrm{Hom}(D_2, D_1) = 0$

(2) $\forall X \in D$ $\exists$ un Δ exacto $\underset{D_2}{\underset{\cap}{A}} \to X \to \underset{D_1}{\underset{\cap}{B}} \to A[1]$

Def.- Decimos $D = \langle D_1, \dots, D_r \rangle$ es una S.O.D si

(1) $\mathrm{Hom}(D_j, D_i) = 0 \quad \forall i < j$

(2) $\forall X \in \mathcal{D}$ $\exists$

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[rr] & & T_{r-1} \arrow[rr] \arrow[dl] & & \cdots \arrow[rr] & & T_2 \arrow[rr] \arrow[dl] & & T_1 \arrow[rr] \arrow[dl] & & X \arrow[dl] \\
& D_r \arrow[ul, dashed] \arrow[d, phantom, sloped, "\in"] & & & & D_3 \arrow[d, phantom, sloped, "\in"] & & D_2 \arrow[ul, dashed] \arrow[d, phantom, sloped, "\in"] & & D_1 \arrow[ul, dashed] \arrow[d, phantom, sloped, "\in"] & \\
& \mathcal{D}_r & & & & \mathcal{D}_3 & & \mathcal{D}_2 & & \mathcal{D}_1 &
\end{tikzcd}$$

Equivalentemente: $\mathcal{D}_i \subset \mathcal{D}$ triang. full

(1) $\mathrm{Hom}(\mathcal{D}_j, \mathcal{D}_i) = 0$

(2) $\mathcal{D}_1, \dots, \mathcal{D}_r$ generan $\mathcal{D}$ como cat. triang. $\mathcal{D}_i \subseteq \mathcal{D}$ es una subcategoría admisible.

Def: Si $F: \mathcal{A} \to \mathcal{B}$, $G: \mathcal{B} \to \mathcal{A}$ functores decimos F es <u>adjunto</u> (izq.) de G ($F \dashv G$) si $\mathrm{Hom}(FA, B) \simeq \mathrm{Hom}(A, GB)$ functorialmente.

Ej.- $A \to B$ morfismo de anillos, $\underset{M^{\varepsilon}}{B\text{-mod}} \overset{\text{restr.}}{\underset{\otimes B}{\rightrightarrows}} \underset{N}{A\text{-mod}}$

$\mathrm{Hom}_A(M, N) = \mathrm{Hom}_B(N \otimes B, M)$

$\therefore$ $\_\_ \otimes B \dashv \text{restr.}$

Def.- $\mathcal{D}' \subset \mathcal{D}$ subcat. full, decimos que $\mathcal{D}'$ es <u>admisible</u> si el functor $\mathcal{D}' \hookrightarrow \mathcal{D}$ tiene adjunto por izq y adjunto por derecha.