

Sebastián Torres : Categría derivada 27/Agosto/2019

(1)

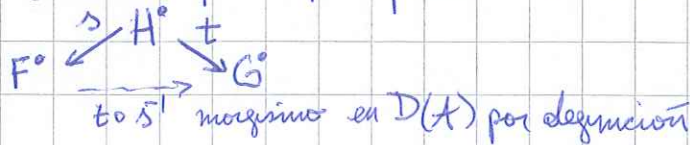
$A = \text{Coh}(X)$ obj: haces coherentes, morf.: morf. de haces coh.
 es una categría abeliana.

Tesis de Verdier

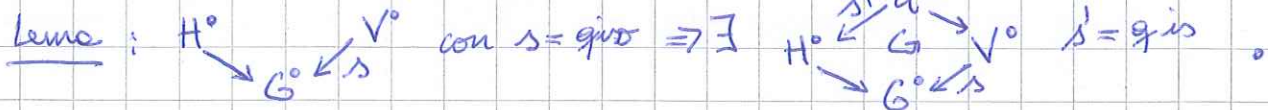
Categría $D(A)$: obj = complejos $\dots \xrightarrow{d} F^r \xrightarrow{d} F^{r+1} \xrightarrow{d} \dots$ $d^2=0$
 morf = morfismos de complejos + inversos de todos los cuasi-morf.

ie, $F^\bullet \xrightarrow{s} G^\bullet$ morfismo de complejos en $\text{Com}(A)$ tq $s: H^i(F) \xrightarrow{\sim} H^i(G)$ se llama cuasi-isomorfismo.

Ingrediente principal para invertir cuasi-ism:



$$\text{Morf}_{D(A)}(F^\bullet, G^\bullet) = \{ t \circ s^{-1} \}$$



En realidad: $A = \text{cat. abeliana} \rightsquigarrow \text{Com}(A) \rightsquigarrow K(A)$
 cat. de homotopía

obj: Complejos
 morf: morf. Com / \sim homot.

$\rightsquigarrow D(A)$

Def: $f, g \in \text{Morf}_{\text{Com}(A)}(F^\bullet, G^\bullet)$ son homotópicos si $\exists H$

$$\begin{array}{ccccc}
 & F^r & \xrightarrow{d} & F^{r+1} & \\
 & \swarrow f & & \swarrow g & \\
 & G^r & \xrightarrow{d} & G^{r+1} & \\
 & \searrow h & & \searrow h &
 \end{array}$$

$h \circ d + d \circ h = f - g$

Def: A categría triangulada es una categría abeliana con una autoequivalencia $A \xrightarrow{T} A$, $T(F) = F[1]$ y con una clase de "triángulos distinguidos".

$$A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \xrightarrow{h} A[1]$$

tal que el conij de Δ distinguidos (exactos) satisface 4 axiomas:

- (1) $A \xrightarrow{1} A \rightarrow 0 \rightarrow A[1]$ es exacto
- (2) $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \xrightarrow{h} A[1] \Rightarrow B \xrightarrow{g} C \xrightarrow{h} A[1] \xrightarrow{f[1]} B[1]$
exacto exacto
- (3) Si tengo $A \xrightarrow{f} B \exists A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \xrightarrow{h} A[1]$ exacto.
- (4) Axioma del octaedro.

Se deduce que

$$\begin{array}{ccccccc}
 A & \rightarrow & B & \rightarrow & C & \rightarrow & A[1] \\
 \downarrow f & & \downarrow g & & \downarrow h & & \\
 A & \rightarrow & B & \rightarrow & C & \rightarrow & A[1]
 \end{array}$$

→ En el caso de $D(A)$, $[1]: D(A) \rightarrow D(A)$ está dado por $(F^0, d) \in D(A)$, $F^0[1] := (F^{0+1}, -d)$

Los triángulos exactos son aquellos que vienen de $A^0 \xrightarrow{f} B^0 \rightarrow C^0(f) \rightarrow A^0[1]$

$C^0(f)$ es definido:

$$\begin{array}{ccc}
 A^i & \xrightarrow{-d} & A^{i+1} \\
 \oplus & \searrow f & \oplus \\
 B^{i-1} & \xrightarrow{d} & B^i
 \end{array}
 \quad \begin{bmatrix} -d & 0 \\ f & d \end{bmatrix}$$

Importante: Si $0 \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow 0$ exacto en A } Primero $\exists \delta$ (según diagrama)
 $\Rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow A[1]$ exacto en $D(A)$ } $\begin{matrix} A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow A[1] \\ \uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow \\ A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow A[1] \end{matrix}$

Prop: Si $A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow A[1]$ es exacto
 $\Rightarrow \dots \rightarrow \text{Mor}(X, C[-1]) \rightarrow \text{Mor}(X, A) \rightarrow \text{Mor}(X, B) \rightarrow \text{Mor}(X, C) \rightarrow \dots$
 es una sucesión exacta de grupos abelianos $\forall X \in D(A)$

$D^b(A) = \text{cat. der de } A$ octaedro ; $\text{obj} = \dots \rightarrow 0 \rightarrow \dots \rightarrow F^r \rightarrow \dots \rightarrow 0 \rightarrow 0 \dots$
 y lo mismo

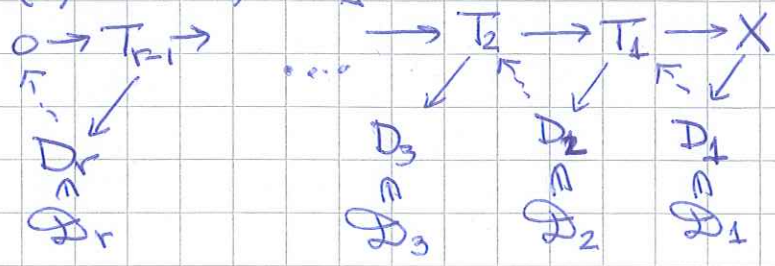
$D^+(A) : \rightarrow 0 \rightarrow \dots \rightarrow F^r \rightarrow \dots$
 $D^-(A) : \rightarrow F^r \rightarrow \dots \rightarrow 0 \rightarrow \dots$

Def. Sea \mathcal{D} categoría triangulada decimos $\mathcal{D} = \langle \mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2 \rangle$ es una S.O.D. si $\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2 \subset \mathcal{D}$ subcat. triang. full tal que

- (1) $\text{Hom}(\mathcal{D}_2, \mathcal{D}_1) = 0$
- (2) $\forall X \in \mathcal{D} \exists$ un Δ exacto $A \rightarrow X \rightarrow B \rightarrow A[1]$
 $\quad \quad \quad \uparrow \quad \quad \quad \uparrow$
 $\quad \quad \mathcal{D}_2 \quad \quad \quad \mathcal{D}_1$

Def. Decimos $\mathcal{D} = \langle \mathcal{D}_1, \dots, \mathcal{D}_r \rangle$ es una S.O.D. si

- (1) $\text{Hom}(\mathcal{D}_j, \mathcal{D}_i) = 0 \quad \forall i < j$
- (2) $\forall X \in \mathcal{D} \exists$



Equivalentemente: $\mathcal{D}_i \subset \mathcal{D}$ triang. full

- (1) $\text{Hom}(\mathcal{D}_j, \mathcal{D}_i) = 0$
- (2) $\mathcal{D}_1, \dots, \mathcal{D}_r$ generan \mathcal{D} como cat. triang. $\mathcal{D}_i \subseteq \mathcal{D}$ es una subcategoría admisible.

Def. Si $F: A \rightarrow B, G: B \rightarrow A$ funtores decimos F es adyunto (izq.) de G ($F \dashv G$) si $\text{Hom}(FA, B) \cong \text{Hom}(A, GB)$ functorialmente.

Ej. $A \rightarrow B$ morfismo de anillos, $B\text{-mod} \xrightarrow{\text{rest.}} A\text{-mod}$
 $\quad \quad \quad \uparrow \quad \quad \quad \uparrow$
 $\quad \quad \otimes B \quad \quad \quad \otimes B$
 $\text{Hom}_A(M, N) = \text{Hom}_B(\overset{N \otimes B}{M}, \overset{M}{N \otimes B})$

$\therefore \text{rest.} : \text{---} \otimes B \dashv \text{rest.}$

Def. $\mathcal{D}' \subset \mathcal{D}$ subcat. full, decimos que \mathcal{D}' es admissible si el functor $\mathcal{D}' \hookrightarrow \mathcal{D}$ tiene adyunto por izquierda y adyunto por derecha.