$$\begin{array}{ccccccc} \mathcal{A} & \rightsquigarrow & Kom(\mathcal{A}) & \rightsquigarrow & K(\mathcal{A}) & \rightsquigarrow & \mathcal{D}(\mathcal{A}) \\ \text{abeliana} & & \text{abeliana} & & \text{salvo homot. triang} & & \text{triangulada} \end{array}$$

y se habló de S.O.D. . Sea $\mathcal{D}$ es cat. triang $\mathbb{C}$-lineal.

Def 1. $E \in \mathcal{D}$ es excepcional si

- $Hom_{\mathcal{D}}(E, E[\ell]) = \begin{cases} \mathbb{C} & \text{si } \ell = 0 \\ 0 & \text{si } \ell \neq 0 \end{cases}$

Obs 1. $\langle E \rangle :=$ subcat. triang full más chica que contiene E.
Si E es excepcional $\Rightarrow \langle E \rangle \simeq D^b(pt)$, y $\langle E \rangle$ es admisible.

Def: $E_1, \ldots, E_r$ es una colección excepcional.

- E_i es excepcional.
- $Hom(E_j, E_i[\ell]) = 0 \quad \forall j > i, \forall \ell$.

$\Rightarrow \mathcal{D} = \langle \underbrace{\cap E_i^{\perp}}_{\text{Complicado!!!}}, E_1, E_2, \ldots, E_r \rangle$ y $\langle E_1, \ldots, E_r, \cap {}^{\perp}E_i \rangle = \mathcal{D}$.

Ejemplo: $X = \mathbb{P}^N$, $\mathcal{O}, \mathcal{O}(1), \ldots, \mathcal{O}(n)$ es una colección excepcional

De hecho: $Hom_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{O}(j), \mathcal{O}(i)) = Hom_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{O}, \mathcal{O}(i-j)) = \Gamma(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}(i-j)) = \begin{cases} 0 & j > i \\ \mathbb{C} & j = i \end{cases}$

$$Hom_{D^b(\mathbb{P}^n)}(\mathcal{O}(j), \mathcal{O}(i)[\ell]) = Hom_{D^b(\mathbb{P}^n)}(\mathcal{O}, \mathcal{O}(i-j)[\ell])$$

Pensar:

$$\begin{array}{ccccccccccc} & & 0 & \cdots & & & 0 & \to & \mathcal{O} & \to & 0 \\ & & \downarrow & & & & & & \downarrow & & \\ 0 & \to & \mathcal{O}(i-j) & \to & \cdots & \to & 0 & \to & 0 & \to & 0 \\ & & \downarrow{\scriptstyle qis} & & & & & & & & \\ 0 & \to & I^0 & \to & I^1 & \to & I^2 & \to & \cdots & & \end{array}$$

En $D^b(\mathbb{P}^2)$, esto es lo mismo que tener un morfismo entre:

$$\begin{array}{ccccccc} & & & & \mathcal{O} & & \\ & & & & \downarrow & & \\ \cdots & \to & I^{\ell-1} & \to & I^{\ell} & \to & I^{\ell+1} \to \cdots \end{array}$$

Hecho: si $I^\bullet$ ~~son~~ es inyectivos

$$\Rightarrow \operatorname{Hom}_{D(A)}(F^\bullet, I^\bullet) = \operatorname{Hom}_{K(A)}(F^\bullet, I^\bullet) . \quad (\star)$$

$K(A) \rightarrow$ se usa la homotopía para:

~~Hom~~ $\cdots \to \operatorname{Hom}(\mathcal{O}, I^{l-1}) \to \operatorname{Hom}(\mathcal{O}, I^{l}) \to \operatorname{Hom}(\mathcal{O}, I^{l+1}) \to \cdots$

$\therefore \operatorname{Hom}_{D(\mathbb{P}^n)}(\mathcal{O}, I^\bullet) = H^l(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}(i-j))$ por definición.

$\therefore \operatorname{Hom}(\mathcal{O}(j), \mathcal{O}(i)[l]) = H^l(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}(i-j))$

si $i=j$, $H^l(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}) = \begin{cases} \mathbb{C} & l=0 \\ 0 & l \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \mathcal{O}(i)$ es excepcional.

si $j>i \rightsquigarrow H^l(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}(i-j)) = 0$ si $-n \leq i-j < 0$

$\therefore \mathcal{O}, \mathcal{O}(1), \dots, \mathcal{O}(n)$ es colección excepcional
pero $\mathcal{O}, \mathcal{O}(1), \dots, \mathcal{O}(n+1)$ no lo es a través de shifteo

En realidad, $\mathcal{O}(\alpha), \mathcal{O}(\alpha+1), \dots, \mathcal{O}(\alpha+n)$ es colección excepcional.

Hecho: $D^b(\mathbb{P}^n) = \langle \mathcal{O}, \mathcal{O}(1), \dots, \mathcal{O}(n) \rangle$ [Se verá después].

Functor derivado.

Supongamos $F: \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ functor entre dos categorías abelianas el cual es exacto por la izquierda.

Por ejemplo: $F = \Gamma(X, -): \operatorname{QCoh}(X) \to \operatorname{Ab}$.

Quiero definir $RF: \mathcal{D}^+(\mathcal{A}) \to \mathcal{D}^+(\mathcal{B})$. Se hace así:

$F: \mathcal{A} \to \mathcal{B} \rightsquigarrow$ tengo $F: K^+(\mathcal{A}) \to K^+(\mathcal{B})$

$$\begin{tikzcd} & K^+(\mathcal{A}) \arrow[r] \arrow[d] & K^+(\mathcal{B}) \arrow[d] \\ \boxed{K^+(\mathrm{Inj}) \arrow[ur] \arrow[r, shift left, "i"] & \mathcal{D}^+(\mathcal{A})} \arrow[l, shift left, "i^{-1}"] \arrow[r, dashed] & \mathcal{D}^+(\mathcal{B}) \end{tikzcd}$$

si $\mathcal{A}$ tiene suficientes inyectivos $\Rightarrow i$ es equivalencia de categorías.

[Que es lo que apareció antes. Ej $A \in \mathcal{A} \Rightarrow A \to I^\bullet$ resol.
$\Rightarrow A$ es cuasi-isom a $I^\bullet$. $\mathrm{Hom}_{K^+(\mathrm{Inj})}(G^\bullet, I^\bullet) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}(\mathcal{A})}(G^\bullet, I^\bullet)$]

i.e. $\mathcal{D}^+(\mathcal{A}) \xrightarrow{i^{-1}} K^+(\mathrm{Inj}) \hookrightarrow K^+(\mathcal{A}) \to K^+(\mathcal{B}) \to \mathcal{D}^+(\mathcal{B})$.

Este proceso define $RF: \mathcal{D}^+(\mathcal{A}) \to \mathcal{D}^+(\mathcal{B})$ functor derivado derecho de F.

$A^\bullet \in \mathcal{D}^+(\mathcal{A}) \rightsquigarrow RF(A^\bullet) \in \mathcal{D}^+(\mathcal{B})$ Notación: $R^iF(A^\bullet) := H^i(RF(A^\bullet))$

Ejemplo: $F = \Gamma(X, \_\_): \mathrm{QCoh}(X) \to \mathrm{Ab}$
$RF(\underset{\in \mathrm{QCoh}(X)}{\mathcal{G}})$ se calcula así

$$\begin{array}{c} \mathcal{G} \\ \downarrow \\ 0 \to I^0 \to I^1 \to I^2 \to \cdots \end{array}$$

$\Rightarrow 0 \to \Gamma(X, I^0) \to \Gamma(X, I^1) \to \cdots = RF(\mathcal{G})$

$R^iF(\mathcal{G}) =$ i-ésima cohomología $= H^i(X, \mathcal{G})$.

Ejercicio: $F, G \in \mathcal{A} \Rightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}^b(\mathcal{A})}(F, G[\ell]) = \mathrm{Ext}^\ell(F, G) := R^\ell\mathrm{Hom}(F, \_)(G)$.

Obs: $R^0F = F$

Nota: si $F: \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ exacto por derecha, puedo definir $LF: \mathcal{D}^-(\mathcal{A}) \to \mathcal{D}^-(\mathcal{B})$ derivado por la izquierda siempre que haya suficientes proyectivos en $\mathcal{A}$.