

3-Septiembre-2019 ; S. Tones ; Derivados

①

$$A \xrightarrow{\text{obeliana}} \text{Kom}(A) \xrightarrow{\text{obeliana}} K(A) \xrightarrow{\text{triang.}} \mathcal{D}(A)$$

solos homot.
triangulada

y se habló de S.O.D. Sea \mathcal{D} es cat. triang. \mathbb{C} -lineal.

Def. $E \in \mathcal{D}$ es excepcional si

- $\text{Hom}_{\mathcal{D}}(E, E[l]) = \begin{cases} \mathbb{C} & \text{si } l=0 \\ 0 & \text{si } l \neq 0 \end{cases}$

Def. $\langle E \rangle :=$ subcat. triang. full más chico que contiene E .
 Si E es excepcional $\Rightarrow \langle E \rangle \cong \mathcal{D}^b(\text{pt})$, y $\langle E \rangle$ es admissible.

Def. E_1, \dots, E_r es una colección excepcional.

- E_i es excepcional.
- $\text{Hom}(E_j, E_i[l]) = 0 \quad \forall j > i, \forall l$.

$\Rightarrow \mathcal{D} = \langle \bigcap E_i^\perp, E_1, E_2, \dots, E_r \rangle$ y $\langle E_1, \dots, E_r, \bigcap E_i^\perp \rangle = \mathcal{D}$.

~~Complicado!!!~~

Ejemplo: $X = \mathbb{P}^n$, $\mathcal{O}, \mathcal{O}(1), \dots, \mathcal{O}(n)$ es una colección excepcional.

Se hecho: $\text{Hom}_{\mathcal{D}}(\mathcal{O}(j), \mathcal{O}(i)) = \text{Hom}_{\mathcal{D}}(\mathcal{O}, \mathcal{O}(i-j)) = \Gamma(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}(i-j)) = \begin{cases} 0 & j > i \\ \mathbb{C} & j = i \end{cases}$

$$\text{Hom}_{\mathcal{D}(\mathbb{P}^n)}(\mathcal{O}(j), \mathcal{O}(i)[l]) = \text{Hom}_{\mathcal{D}(\mathbb{P}^n)}(\mathcal{O}, \mathcal{O}(i-j)[l])$$

Pensar:

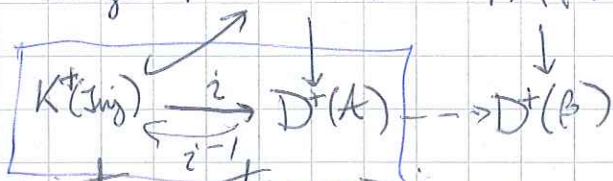
$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & \cdots & 0 & \rightarrow & \mathcal{O} & \rightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 0 & \rightarrow & \mathcal{O}(i-j) & \rightarrow \cdots \rightarrow & 0 & \rightarrow & 0 \rightarrow 0 \\
 & & \downarrow \text{gr} & & & & \\
 0 & \rightarrow & \mathcal{I}^0 & \rightarrow \mathcal{I}^1 & \rightarrow \mathcal{I}^2 & \rightarrow & \cdots
 \end{array}$$

En $\mathcal{D}(\mathbb{P}^n)$, esto es lo mismo que tener un morfismo entre:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & & \mathcal{O} & & \\
 & & & & \downarrow & & \\
 \cdots & \rightarrow & \mathcal{I}^{l-1} & \rightarrow & \mathcal{I}^l & \rightarrow & \mathcal{I}^{l+1} \rightarrow \cdots
 \end{array}$$

Quiero definir $RF: D^+(A) \rightarrow D^+(B)$. Se hace así: (3)

$$F: A \rightarrow B \rightsquigarrow \text{tengo } F: K^+(A) \rightarrow K^+(B)$$



Si A tiene suficientes injectivos $\Rightarrow i$ es equivalencia de categorías.

[Que es lo que apareció antes, Ej $A \in \mathcal{A} \Rightarrow A \rightarrow I^0$ resol. $\rightarrow A$ es casi-isom a I^0 . $\text{Hom}_{K^+(inj)}(G^0, I^0) = \text{Hom}_{D^+(A)}(G^0, I^0)$]

$$i.e. D^+(A) \xrightarrow{i^{-1}} K^+(inj) \hookrightarrow K^+(A) \rightarrow K^+(B) \rightarrow D^+(B)$$

Este proceso define $RF: D^+(A) \rightarrow D^+(B)$ funtor derivado derecho de F .

$$A^0 \in D^+(A) \rightsquigarrow RF(A^0) \in D^+(B) \text{ Notación: } R^i F(A^0) = H^i(RF(A^0))$$

Ejemplo: $F = \Gamma(X, -): \text{Qcoh}(X) \rightarrow \text{Ab}$

$RF(G)$ se calcula así

$$\Rightarrow 0 \rightarrow \Gamma(X, I^0) \rightarrow \Gamma(X, I^1) \rightarrow \dots = RF(G)$$

$$0 \rightarrow \begin{matrix} G \\ \downarrow \\ I^0 \end{matrix} \rightarrow I^1 \rightarrow I^2 \rightarrow \dots$$

$$R^i F(G) = i\text{-ésima cohomología} = H^i(X, G)$$

$$\text{Ejercicio: } F, G \in \mathcal{A} \Rightarrow \text{Hom}_{D^+(A)}(F, G[1]) = \text{Ext}^1(F, G) = R^1 \text{Hom}(F, -)(G)$$

obs: $R^0 F = F$

Nota: Si $F: A \rightarrow B$ exacto por derecha, puedo definir $LF: D(A) \rightarrow D(B)$ derivado por la izquierda siempre que haya suficientes proyectivos en A .