Sergio Troncoso
Categoría Derivada del Blow-up (10/sept./19)

objetivo: X = suave proy $\supset Y$ = subvar. cerrada suave
Describir $D^b(Bl_Y(X))$ en términos de $\mathcal{D}^b(X)$ y $\mathcal{D}^b(Y)$.

Notaciones: $i: Y \hookrightarrow X$, $q: \tilde{X} = Bl_Y(X) \to X$, $E :=$ div-excep q
$\mathcal{J}_Y :=$ haz de ideales de Y en X

$$\begin{tikzcd} \mathbb{P}(\mathcal{J}_Y/\mathcal{J}_Y^2) = E \arrow[r, hook, "j"] \arrow[d, "\pi"] & \tilde{X} \arrow[d, "q"] \\ Y \arrow[r, hook, "i"] & X \end{tikzcd}$$

Preliminar: Transformada de Fourier-Mukai. Dadas X, Y variedades suaves proyectivas. Sea $\mathcal{P}^\bullet \in \mathcal{D}^b(X \times Y)$,

$$\underbrace{\begin{aligned} \Phi_{\mathcal{P}^\bullet}: \mathcal{D}^b(X) &\longrightarrow \mathcal{D}^b(Y) \\ \mathcal{E}^\bullet &\mapsto Rp_*(\mathcal{P}^\bullet \overset{L}{\otimes} Lq^*(\mathcal{E}^\bullet)) \end{aligned}}_{\text{Transformada de Fourier-Mukai con kernel } \mathcal{P}^\bullet}$$ es un functor exacto

$$\begin{tikzcd} & X \times Y \arrow[dl, "q"'] \arrow[dr, "p"] & \\ X & & Y \end{tikzcd}$$

Def: $\mathcal{P}^\bullet \in \mathcal{D}^b(X \times Y)$, $\mathcal{P}^{\bullet\vee} = Hom(\mathcal{P}^\bullet, \mathcal{O}_{X\times Y})$
$$\mathcal{P}_L^\bullet := \mathcal{P}^\vee \otimes p^*(\omega_Y[\dim Y])$$
$$\mathcal{P}_R^\bullet = \mathcal{P}^\vee \otimes q^*(\omega_X[\dim X])$$

Def: Functor de Serre $D^b(X) \xrightarrow{S_X} D^b(X)$, $\mathcal{E}^\bullet \mapsto \mathcal{E}^\bullet \otimes \omega_X[\dim X]$
$[\,Hom(\mathcal{E}^\bullet, \mathcal{F}^\bullet) \simeq Hom(\mathcal{F}^\bullet, S_X(\mathcal{E}^\bullet))^*\,]$

Prop: $\Phi_{\mathcal{P}^\bullet_L} \dashv \Phi_{\mathcal{P}^\bullet} \dashv \Phi_{\mathcal{P}^\bullet_R}$

Teo: (Orlov) Sean X, Y variedades suaves y sea $F: \mathcal{D}^b(X) \to \mathcal{D}^b(Y)$ ~~exacto~~ tal que F admite un functor adjunto a derecha (y uno a izquierda). Entonces existe $\mathcal{P}^\bullet \in D^b(X \times Y)$ tq $F \simeq \Phi_{\mathcal{P}^\bullet}$.

Ejemplos: $I_d : \mathcal{D}^b(X) \to \mathcal{D}^b(X)$

1) $I_d \simeq \Phi_{\mathcal{O}_\Delta}$, $i : X \xrightarrow{\sim} \Delta \subset X \times X$

$$\begin{tikzcd} & X\times X \arrow[dl, "p"'] \arrow[dr, "p"] & \\ X & & X \end{tikzcd}$$

$$\Phi_{\mathcal{O}_\Delta}(\mathcal{E}^\bullet) = p_*(\mathcal{O}_\Delta \otimes p^*(\mathcal{E}^\bullet)) = p_*(p^*(\mathcal{E}^\bullet) \otimes i_*\mathcal{O}_X)$$
$$\simeq p_*(i_*(i^* p^*(\mathcal{E}^\bullet) \otimes \mathcal{O}_X))$$
$$\simeq p_* i_*(i^* p^*(\mathcal{E}^\bullet)) = (p\circ i)_* (p\circ i)^*(\mathcal{E}^\bullet) \simeq \mathcal{E}^\bullet$$

2) $f_* \simeq \Phi_{\mathcal{O}_{\Gamma_f}}$, Γ_f gráfico de f

Fácil

Prop: 1) Sean $F : A \to B$ y $G : B \to A$ functores tales que $G \dashv F$. Si $G\circ F \simeq 1_A$. Entonces F fully faithfull.

2) A, B son categorías Δ ladas $F : A \to B$ y $\exists\, G : B \to A$ tq $G \dashv F$ $\Rightarrow$ $F(A)$ una categoría Δ lada admisible de B.

obs: $q : \tilde{X} \to X$ entonces $Rq_* \mathcal{O}_{\tilde{X}} = \mathcal{O}_X$.
$\tilde{X} = Bl_Y(X)$

Prop: supongamos $f : S \to T$ un morfismo proy entre variedades proy. suaves tq $Rf_*(\mathcal{O}_S) = \mathcal{O}_T$.
Entonces $Lf^* : \mathcal{D}^b(T) \to \mathcal{D}^b(S)$ es fully faithfull y $Lf^*(\mathcal{D}^b(T))$ es una sub. categoría Δ lada admisible de $\mathcal{D}^b(S)$.

proof: $f^* \dashv f_*$ son adjuntos y $f_*(f^*(\mathcal{E}^\bullet)) \simeq f_*(f^*(\mathcal{E}^\bullet) \otimes \mathcal{O}_S)$
$\simeq \mathcal{E}^\bullet \otimes f_*\mathcal{O}_S \simeq \mathcal{E}^\bullet \otimes \mathcal{O}_T \simeq \mathcal{E}^\bullet$.

Notación : $q^* \mathcal{D}^b(X) := \mathcal{D}_0 \subseteq \mathcal{D}^b(\tilde{X})$.

Construcción : Sub. suave $Y \subset X$, $\mathrm{cod}_X(Y) = c \geq 2$. Para cada $k \in \mathbb{Z}$, $\Phi_k : \mathcal{D}^b(Y) \to \mathcal{D}^b(\tilde{X})$
$$\mathcal{E}^\bullet \mapsto j_*(\mathcal{O}_E(kE) \otimes \pi^*(\mathcal{E}^\bullet))$$

General fact:

$$\begin{tikzcd} & B \arrow[dl, "\pi"'] \arrow[d] \arrow[dr, "j"] & \\ A & A\times C \arrow[l] \arrow[r] & C \end{tikzcd} \qquad j_*(\pi^* \_ \otimes \mathcal{F}^\circ)$$

$\Rightarrow$ es un F-M transf pushing forward from B.

$\therefore\ \Phi_K \simeq \Phi_{\rho^\circ}$ [$\therefore\ \Phi_K$ es una transf. de Furier-Mukai]

$\mathrm{Codim}_X(Y) = c \geq 2 \qquad D_k = \Phi_{-k}(D^b(Y))$

[Notemos que $k(x) \mapsto j_*(\mathcal{O}_E(kE) \otimes \pi^*(k(x)))$
$= j_*(\mathcal{O}_E(kE) \otimes \mathcal{O}_{\pi^{-1}(x)}) = j_*(\mathcal{O}_E(kE) \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{c-1}})$
$= j_*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^{c-1}}(k))$

$\mathrm{Hom}(k(x), k(y)) = \mathrm{Hom}(j_*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^{c-1}_x}(k)), j_*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^{c-1}}(k))) = \begin{cases} 0 & x \neq y \\ & x = y \end{cases}$

Koszul: $0 \to \Lambda^{\dim Y} \mathcal{O}_X^{\dim Y} \to \dots \to \Lambda^2 \mathcal{O}_X^{\dim Y} \to \mathcal{O}_X^{\dim Y} \to \mathcal{O}_X \to \mathcal{O}_x \to 0$

$0 \leftarrow \mathrm{Hom}(\Lambda^n \mathcal{O}_X^n, k(x)) \leftarrow \dots \leftarrow \mathrm{Hom}(\Lambda^2 \mathcal{O}_X^n, k(x)) \leftarrow \dots \leftarrow \mathrm{Hom}(\mathcal{O}_X, k(x)) \leftarrow 0$

$0 \; k \quad \xleftarrow{0} k^{\binom{n}{2}} \dots \xleftarrow{0} k^n \xleftarrow{0} k \xleftarrow{0} 0$

diferenciales son 0.

D_{-k} equiv a $D^b(Y)$, $k=1,\dots,c-1$

Sea: $\tilde{X} \xrightarrow{q} X$ blow-up de un punto, $k = -c+1, \dots, -1$

Prop: (Orlov) $\langle D_{-c+1}, \dots, D_{-1}, D_0 \rangle \simeq D^b(\tilde{X})$

Ej: $X = \mathbb{P}^2$, $Y = pt$, $D^b(\tilde{X}) = \langle D_{-1}, D_0 \rangle$, $D_{-1} = \langle \mathcal{O}_E \rangle$
$D_0 = \langle q^*\mathcal{O}, q^*\mathcal{O}(1), q^*\mathcal{O}(2) \rangle$.

$R\mathrm{Hom}(\mathcal{O}_E, \mathcal{O}_E) = k$