Categorías derivadas de algunos 3-folds de Fano I (1)
Pedro Montero (1-oct-2019)

Recuerdo: Sea X variedad de Fano (ie $-K_X$ amplio) suave de dim n.
Índice de Fano es el entero i_X más grande tq $-K_X = i_X H$ donde H amplio. Hecho: $1 \leq i_X \leq n+1$ (eg. $i_{\mathbb{P}^n} = n+1$) (eg $i_{Q^n} = n$)

Teo: (Kobayashi-Ochiai '73)
$i_X = n+1 \iff X \simeq \mathbb{P}^n$
$i_X = n \iff X \simeq Q^n \subseteq \mathbb{P}^{n+1}$

$i = n-1$ "del Pezzo": Clasificados Iskovskikh, Fujita
$i = n-2$ "Fano-Mukai": Clasificados Varios People.

Prop: Sea X var. de Fano. Entonces $D^b(X) = \langle \mathcal{A}_X, \mathcal{O}_X, \mathcal{O}_X(H), \dots, \mathcal{O}_X((i_X-1)H) \rangle$ S.O.D.
↑ Componente de Kuznetsov

Supongamos que $\dim_{\mathbb{C}}(X) = 3$.
Si $X = X_{d_1,\dots,d_r} \subseteq \mathbb{P}^{r+3}$ intersección completa ($d_i \geq 2$).
$\Rightarrow$ adjunción $-K_X = (r+4-d_1-\dots-d_r)H$
Veamos el caso $i_X = 2$:
Queremos $r+4-d_1-\dots-d_r = 2 \Rightarrow r \leq 2$
Si $r=1 \Rightarrow d_1 = 3$ (3-fold cúbico). Si $r=2$: $d_1 = d_2 = 2$ (Prox. semana)

Por otra parte:
① $X = X_3 \subseteq \mathbb{P}^4$ no es racional (Clemens-Griffiths)
② $X = X_{2,2} \subseteq \mathbb{P}^5$ es racional.

Filosofía Kuznetsov: "La racionalidad debería detectarse en $D^b(X)$".

Hoy 3-fold cúbicos: (Kuznetsov 2004) Sea $X = X_3 \subseteq \mathbb{P}^4$
$\Rightarrow D^b(X) = \langle \mathcal{A}_X, \mathcal{O}_X, \mathcal{O}_X(H) \rangle$

Veremos que $\mathcal{A}_X \not\cong \mathcal{D}^b(M)$, $\forall M$ var proy. suave.

<u>Recuerdo</u>: Un functor de Serre en una categoría triangulada $\mathcal{D}$ es una autoequivalencia $S_{\mathcal{D}} : \mathcal{D} \to \mathcal{D}$ tq
$$\mathrm{Hom}(\mathcal{F}, \mathcal{G})^* \cong \mathrm{Hom}(\mathcal{G}, S_{\mathcal{D}}(\mathcal{F}))$$

Si $\mathcal{D} = \mathcal{D}^b(X) \Rightarrow S_X = S_{\mathcal{D}^b(X)}$ está dado por $\mathcal{F}^\bullet \mapsto \mathcal{F}^\bullet \otimes \omega_X[\dim X]$.
(es único)

En particular, si X es una variedad de Calabi-Yau (ie $\omega_X \simeq \mathcal{O}_X$)
$\Rightarrow$ functor de Serre $\simeq [\dim X]$ (shift).

<u>Def.</u>: Una categoría triang. $\mathcal{D}$ con functor de Serre $S_{\mathcal{D}}$ es:
(1) Una categoría de CY de $\dim_{CY} = n \in \mathbb{Z}$ si $S_{\mathcal{D}} \cong [n]$.
(2) Una categoría de CY fraccionaria de $\dim_{CY} = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ si $S_{\mathcal{D}}^q \simeq [p]$.

<u>obs</u>: Si $\mathcal{D} = \mathcal{D}^b(M)$ ("geométrica") $\Rightarrow \dim_{CY}(\mathcal{D}) \in \mathbb{Z}$.

★ <u>Prop</u>: Sea $X = X_3 \subseteq \mathbb{P}^4$ 3-fold cúbico $\Rightarrow \dim_{CY}(\mathcal{A}_X) = \frac{5}{3}$.

Recuerdo (mutaciones): Si X var proj suave y $\mathcal{D}^b(X) = \langle \mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_n \rangle$ SOD. $\Rightarrow \mathcal{A}_i \subseteq \mathcal{D}^b(X)$ es <u>admisible</u>, ie, $\alpha_i : \mathcal{A}_i \hookrightarrow \mathcal{D}^b(X)$ admite adjunto izquierdo y derecho: $\alpha_i^* : \mathcal{D}^b(X) \to \mathcal{A}_i$, $\alpha_i^! : \mathcal{D}^b(X) \to \mathcal{A}_i$
(obs: $\alpha_i^* \alpha_i = \alpha_i^! \alpha_i = id_{\mathcal{A}_i}$)

Se definen las mutaciones:
① Izquierda: $L_{\mathcal{A}_i} : \mathcal{D}^b(X) \to \mathcal{A}_i^{\perp}$ al completar (functorialmente)
$\alpha_i \alpha_i^! \longrightarrow \mathrm{Id}_{\mathcal{D}^b(X)} \longrightarrow L_{\mathcal{A}_i}$ (a través de Δ exactos)
② Derecha $R_{\mathcal{A}_i} : \mathcal{D}^b(X) \to {}^{\perp}\mathcal{A}_i$ al completar $R_{\mathcal{A}_i} \to id_{\mathcal{D}^b(X)} \to \alpha_i \alpha_i^*$

(Similar para $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{D}^b(X)$ subcat. admisible).

Se prueba (eg Bondal'90, Bondal-Orlov'95) que si $\mathcal{D}^b(X) = \langle \mathcal{A}, \mathcal{B} \rangle$ SOD con $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ admisible, entonces $S_{\mathcal{A}}$ y $S_{\mathcal{B}}$ existen y $S_{\mathcal{B}} \cong R_{\mathcal{A}} \circ S_X$, $S_{\mathcal{A}}^{-1} \simeq L_{\mathcal{B}} \circ S_X^{-1}$. $(\ast)$

Más aún si $\mathcal{D}^b(X) = \langle \mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_m \rangle$ SOD $\Rightarrow$

$$\mathcal{D}^b(X) = \langle \mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_{k-1}, \mathcal{A}_{k+1}, R_{\mathcal{A}_{k+1}} \mathcal{A}_k, \mathcal{A}_{k+2}, \dots, \mathcal{A}_m \rangle \quad \text{y}$$

$$\mathcal{D}^b(X) = \langle \mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_{k-1}, L_{\mathcal{A}_k} \mathcal{A}_{k+1}, \mathcal{A}_k, \mathcal{A}_{k+2}, \dots, \mathcal{A}_m \rangle \quad \text{son SOD}$$

Hecho: si $\Phi : \mathcal{D} \to \mathcal{D}$ autoequivalencia $\Rightarrow \Phi \circ L_{\mathcal{A}} \cong L_{\Phi(\mathcal{A})} \circ \Phi$ y $\Phi \circ R_{\mathcal{A}} \cong R_{\Phi(\mathcal{A})} \circ \Phi$.

$\to$ En nuestro ejemplo $\mathcal{D}^b(X) = \langle \mathcal{A}_X, \mathcal{O}_X, \mathcal{O}_X(1) \rangle$. Consideramos el functor "de rotación" $\mathbb{O} : \mathcal{D}^b(X) \to \mathcal{D}^b(X)$

$$\mathcal{F}^\bullet \longmapsto L_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}^\bullet \otimes \mathcal{O}_X(1))[-1]$$

Lema 1: $\mathbb{O}|_{\mathcal{A}_X}^2 \cong S_{\mathcal{A}_X}^{-1}[1]$

Demlr Sea $\Phi : \mathcal{D}^b(X) \to \mathcal{D}^b(X)$ $\mathcal{F}^\bullet \mapsto \mathcal{F}^\bullet \otimes \mathcal{O}_X(1)$ es autoequivalencia. Sabemos que $S_X(\mathcal{F}^\bullet) = (\mathcal{F}^\bullet \otimes \mathcal{O}_X(-2))[3]$

$\Rightarrow S_X \cong \Phi^{-2}[3]$.

Luego
$$\mathbb{O}^2 \overset{\text{def}}{\cong} (L_{\mathcal{O}_X} \circ \Phi[-1]) \circ (L_{\mathcal{O}_X} \circ \Phi[-1])$$
$$\underset{\substack{\text{(por lo anterior)}\\ \text{Hecho}}}{=} L_{\mathcal{O}_X} \circ L_{\Phi(\mathcal{O}_X)} \circ \Phi[-1] \circ \Phi[-1]$$
$$= \underbrace{L_{\mathcal{O}_X} \circ L_{\mathcal{O}_X(1)}}_{L_{\langle \mathcal{O}_X, \mathcal{O}_X(1) \rangle}} \circ \Phi^2[-2] \simeq L_{\langle \mathcal{O}_X, \mathcal{O}_X(1) \rangle} \circ \Phi^2[-2]$$
$$\simeq L_{\langle \mathcal{O}_X, \mathcal{O}_X(1) \rangle} \circ S_X^{-1}[1] \qquad \text{pero } S_{\mathcal{A}}^{-1} \cong L_{\mathcal{B}} \circ S_X^{-1}$$

$$\Rightarrow \quad \mathbb{O}|_{\mathcal{A}_X}^2 \simeq S_{\mathcal{A}_X}^{-1}[1] \quad \blacksquare$$

Lema 2: $\mathbb{O}|_{A_X}^3 \simeq [-1]$.

Dem de la prop: $\mathbb{O}|_{A_X}^2 \simeq S_{A_X}^{-1}[1]$ [Lema 1]

$\Rightarrow S_{A_X} \cong \mathbb{O}|_{A_X}^{-2}[1]$. Por Lema 2 $\Rightarrow S_{A_X}^3 \cong \mathbb{O}|_{A_X}^{-6}[3]$

$\Rightarrow S_{A_X}^3 \cong [-(-2)+3] = [5]$ y así $\dim_{CY}(A_X) = \frac{5}{3}$ ∎

Ingredientes para la prueba del Lema 2. Resolución de la diag $\Delta \subseteq \mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^n$ de Beilinson. Notación $X \xleftarrow{\pi_1} X \times Y \xrightarrow{\pi_2} Y$ si $\mathcal{F} \in \mathcal{D}^b(X)$ y $\mathcal{G} \in \mathcal{D}^b(Y)$ definimos $\mathcal{F} \boxtimes \mathcal{G} := \pi_1^* \mathcal{F} \otimes \pi_2^* \mathcal{G}$. Sea $X = Y = \mathbb{P}^n = \mathbb{P}(V)$

Euler:

$$0 \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n} \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1)^{\oplus n+1} \to T_{\mathbb{P}^n} \to 0 \quad / \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(-1)$$

$$0 \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(-1) \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}^{\oplus n+1} \to \underbrace{T_{\mathbb{P}^n} \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(-1)}_{Q} \to 0$$

Sea $\mathcal{E} := \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1) \boxtimes Q$ en $\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^n$: $\mathcal{E} \cong \mathcal{H}om(\pi_1^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(-1), \pi_2^* Q)$

Como $H^1(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(-1)) = 0 \Rightarrow H^0(Q) \simeq H^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}^{\oplus n+1}) / \underbrace{H^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(-1))}_{0} = V$

$$H^0(\mathcal{E}) \underset{\text{Künneth}}{\simeq} \underbrace{H^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1))}_{V^*} \underset{k}{\otimes} \underbrace{H^0(\mathbb{P}^n(Q))}_{V} \simeq \mathrm{End}(V)$$

Sea $s \in H^0(\mathcal{E})$ correspondiente a $1\!\!1_V$.

Sea $(x,y) \in \mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^n$. La fibra de $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(-1)$ en $x \leftrightarrow \ell_x$, la fibra de Q en $y \leftrightarrow V/\ell_y \Rightarrow$ la fibra de $\mathcal{E} \cong \mathcal{H}om(\pi_1^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(-1), \pi_2^* Q)$ en (x,y) $\leftrightarrow \mathrm{Hom}(\ell_x, V/\ell_y)$. En part si $v \in \ell_x \Rightarrow s(x,y)(v) = v \mod \ell_y$ $\Rightarrow$ se anula cuando $x = y$. Conclusión: $Z(s) = \Delta \underset{\text{diagonal}}{\subseteq} \mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^n$

Recuerdo (Complejo Koszul) Si $\mathcal{E}$ fibrado vectorial de rango r en X = var proyectiva lisa. Sea $s \in H^0(X, \mathcal{E})$ tal que $Z = Z(s) \subseteq X$ es codim r $\Rightarrow$

$$0 \to \Lambda^r \mathcal{E}^* \to \Lambda^{r-1} \mathcal{E}^* \to \dots \to \mathcal{E}^* \to \mathcal{O}_X \to \mathcal{O}_Z \to 0$$

resol, loc. libre donde morf. son duales a $\mathcal{O}_X \xrightarrow{s} \mathcal{E}$.