"Categorías derivadas de ciertos 3-folds de Fano II" P. Montero 8/10/2019

X = Var. Fano suave de índice $i_X=2 \Rightarrow \mathcal{D}^b(X) = \langle \mathcal{O}_X(-1), \mathcal{O}_X, \mathcal{A}_X \rangle$ SOD. Vimos que si $\dim X = 3$ y $X = X_{d_1,\dots,d_r} \subseteq \mathbb{P}^{r+3}$ intersección completa $\underset{i_X=2}{\Longrightarrow}$ $r=1$, $d=3$ y $r=2$, $(d_1,d_2)=(2,2)$.

¡Hoy! $(2,2) \subseteq \mathbb{P}^5$.

Teo (Bondal–Orlov 1995) $\mathcal{A}_X \simeq \mathcal{D}^b(C)$, donde C es una curva $g=2$ asociada a $X = Q_1 \cap Q_2 \subseteq \mathbb{P}^5$.

§ Estrategia / ingredientes: Sea $Q_i = \{f_i = 0\} \subseteq \mathbb{P}^5$. Considerar el pincel de cuádricas $\mathcal{P} = \{\lambda f_1 + \mu f_2 = 0\}_{(\lambda,\mu)\in\mathbb{P}^1}$. Luego, $\mathcal{P} \dashrightarrow \mathbb{P}^1$. Si f_1, f_2 son genéricos hay 6 fibras singulares sobre $q_0,\dots,q_5 \in \mathbb{P}^1$.

Definir $C \xrightarrow{2:1} \mathbb{P}^1$ cubr. doble ramificado en $q_0,\dots,q_5$. Considerar la Grassmaniana ortogonal relativa $Y = \{(q,\Lambda) \in \mathbb{P}^1 \times G(2,5)$ tq $\mathbb{P}^2 \simeq \Lambda \subseteq Q_q\}$

Se prueba que

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[rr, "pr_1"] \arrow[dr, "\varphi"', "\text{suave}"] & & \mathbb{P}^1 \\ & C \arrow[ur, "p"', "2:1"] & \end{tikzcd}$$

Factorización de Stein.

Se construye un divisor $D \subset Y$ y un fibrado vectorial S en $C \times X$ a partir de $\mathcal{L} = \mathcal{O}_Y(D)$. Se verifica que dado $c \in C$ la fibra de S sobre $\{c\} \times X \simeq X$ es un "fibrado espinorial" en la cuádrica $Q_{p(c)}$ restringida a X.

Se considera $S \in \mathcal{D}^b(C \times X)$ y su correspondiente transformada de Fourier-Mukai:

$$\Phi_S : \mathcal{D}^b(C) \longrightarrow \mathcal{D}^b(X)$$
$$K \longmapsto (pr_X)_*(pr_C^* K \otimes S)$$

y se prueba que Φ_S es plenamente fiel.

Para esto último (Cf. [Huybrechts] Cor. 7.5)

<u>Teo</u>: $S \in \mathcal{D}^b(C \times X)$ fibrado vectorial. Entonces Φ_S es plenamente fiel ssi

(a) $\mathrm{Hom}(S_c, S_c) \cong \mathbb{C}$ $\forall c \in C$.
(b) $\mathrm{Ext}^i(S_{c_1}, S_{c_2}) = 0$ $\forall i$, $\forall c_1 \neq c_2$.

Para verificar (a) y (b) se requiere $\mathcal{D}^b(D)$ [Kapranov, 1988] y la cohomología de los fibrados espinoriales [OTTAVIANI, 1988].

$\Rightarrow \mathcal{D}^b(C) \hookrightarrow \mathcal{D}^b(X)$

Se verifica que $\mathcal{D}^b(C) \cong \Phi_S(\mathcal{D}^b(C)) \subseteq \mathcal{A}_X$ (Kapranov).

Si $\mathcal{D} = \langle \mathcal{O}_X(-1), \mathcal{O}_X, \mathcal{D}^b(C) \rangle \subseteq \mathcal{D}^b(X)$ y $Z \in \mathcal{D}^\perp$ entonces usando el carácter de Chern se prueba que $Z \underset{\text{q.i.s}}{\simeq} 0$ ∎

§ Pinceles de cuádricas [Reid, 1972].

Si $X = Q_1 \cap Q_2 \subseteq \mathbb{P}^5$. Sean $\mathcal{U} \simeq \mathbb{C}^2_{(\lambda,\mu)}$ y $V \simeq \mathbb{C}^6_{(x_0,\dots,x_5)}$.
Suponer que Q_i corresp a $f_i \in S^2V^*$ forma cuadrática
Considerar $\mathcal{U} \hookrightarrow S^2V^*$ lineal $\Rightarrow$ la proyectiv. define un pincel $\mathcal{P}$ de cuádricas en $\mathbb{P}^5 = \mathbb{P}(V)$ parametrizados por $\mathbb{P}^1 = \mathbb{P}(\mathcal{U})$.

Así $\mathcal{P} = \{\lambda f_1 + \mu f_2 = 0\}_{[\lambda,\mu] \in \mathbb{P}^1}$. Hipótesis: las cuádricas $\{Q_q\}_{q \in \mathbb{P}^1}$ son suaves o bien conos proy. sobre cuádricas suaves de dim 3.

$\Rightarrow \exists$ puntos $q_0, \dots, q_N \in \mathbb{P}^1$ tal que Q_{q_i} singular. De hecho, se pueden hallar coord de $\mathbb{P}^5$ tq $Q_1 = \{x_0^2 + \dots + x_5^2 = 0\} \subseteq \mathbb{P}^5$
y $Q_2 = \{a_0 x_0^2 + \dots + a_5 x_5^2 = 0\} \subseteq \mathbb{P}^5$ con $a_i \neq a_j$ si $i \neq j$

Si $q = [\lambda, \mu] \in \mathbb{P}^1 \Rightarrow Q_q = \{ \lambda(x_0^2 + \dots + x_5^2) + \mu(a_0 x_0^2 + \dots + a_5 x_5^2) = 0 \}$

Si $\mu = 0 \Rightarrow$ lisa. Si $\mu = 1$: $\frac{\partial f_q}{\partial x_i} = 2x_i(\lambda + a_i)$

$\Rightarrow J_{f_q} = \left(2x_0(\lambda + a_0), \dots, 2x_5(\lambda + a_5) \right)$ (eg: $\lambda = -a_0$, $(1,0,..,0)$ sing $\times$)

Así los sing de $\mathcal{Q} \to \mathbb{P}^1 = \{ q_0 = (1, -a_0), \dots, q_5 = (1, -a_5) \}$.

Obs.- Si $C \xrightarrow{2:1} \mathbb{P}^1$ ramif. en $q_0, \dots, q_5 \Rightarrow g = 2$.

§ La grassmanniana ortogonal (relativa) [Reid, 1972] y [Harris, Lecture 22]

Sea $Q \subseteq \mathbb{P}^{d+1}$ cuádrica suave de dim d. El esquema de Fano es

$$F_k(Q) = \{ \Lambda \simeq \mathbb{P}^k \text{ tq } \Lambda \subseteq Q \}$$
$$\cap$$
$$\mathbb{G}(k, d+1)$$

Notación: $OG(k+1, Q) = F_k(Q)$ "grassmanniana ortogonal".

Se prueba (eg [HARRIS]) que $F_k \neq \emptyset \Leftrightarrow k \leq \frac{\dim(Q)}{2}$.

Obs.- Si $X = X_{d_1, \dots, d_r}$ suave $\subseteq \mathbb{P}^{r+n}$ int. completa $\Rightarrow$ Hay fórmulas explícitas para $\dim F_k(X)$ [Debarre-Manivel, 1998]

Por ejemplo: $\dim(Q) = 4 \to \dim F_1(Q) = 5$, $\dim F_2(Q) = 3$
$\dim(Q) = 3 \to \dim F_1(Q) = 3$

Teorema (Reid): Sea $Gen(Q) := F_{[\frac{\dim Q}{2}]}(Q)$ "generadores"

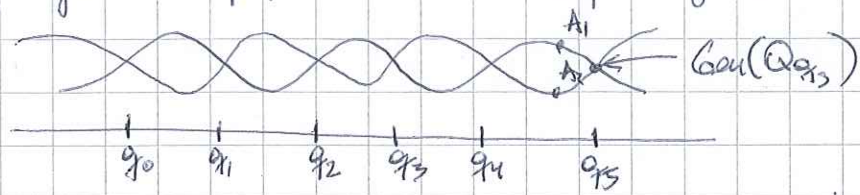
1. Si $\dim(Q)$ impar $\Rightarrow Gen(Q)$ irred y suave.
2. Si $\dim(Q)$ par $\Rightarrow Gen(Q) = A_1 \sqcup A_2$ con A_i irred y suave.

En nuestro caso,

$\mathcal{P} = \{Q_q\}_{q\in\mathbb{P}^1} \longrightarrow \mathbb{P}^1$ consideramos $Y = \{(q,\Lambda)\in \mathbb{P}^1\times G(2,5) \,/\, \Lambda\subseteq Q_q\}$

obs/ Si Q_q es sing $\Rightarrow$ se verifica que $\mathrm{Gen}(Q_q)\simeq \mathrm{Gen}(Q_0)$ donde $Q_0\subseteq\mathbb{P}^4$ cuádrica suave tq $Q_q=\mathrm{Cone}(Q_0)$. En particular, $\mathrm{Gen}(Q_q)$ es irred y suave de dim 3.

La proyección $pr_1: Y\to\mathbb{P}^1$ tiene por fibras $\mathrm{Gen}(Q_q)$:



Luego, si C es el revestimiento doble de $\mathbb{P}^1$ ramificado en $q_0,\dots,q_5$ entonces obtenemos una factorización (de Stein)

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r, "\varepsilon"] \arrow[d, "pr_1"'] & C \arrow[dl, "p"] \\ \mathbb{P}^1 & \end{tikzcd}$$

Hecho: Sea $\ell\subseteq X = Q_1\cap Q_2\subseteq\mathbb{P}^5$ recta. Entonces $D=\{(q,\Lambda)\in Y$ tq $\Lambda\cap\ell\neq\emptyset\}$ es un divisor. Usaremos $\mathcal{L}=\mathcal{O}_Y(D)$ para construir un fibrado vectorial S en $C\times X$.

Consideremos la variedad "flag"

$\mathcal{F}=\{(q,x,\Lambda)\in\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^5\times G(2,5) : x\in\Lambda,\ \Lambda\subset Q_q\}$ Los morfismos $\mathcal{F}\to\mathcal{P}$ y $\mathcal{F}\xrightarrow{\mu} Y\xrightarrow{\varepsilon} C$ inducen $\nu:\mathcal{F}\to\mathcal{P}_C=\mathcal{P}\times_{\mathbb{P}^1}C$

(cambio de base).

$$\begin{tikzcd} & & \mathcal{F} \arrow[dl, "\nu"'] \arrow[dr, "\mu"] & \\ X\times C \arrow[r, hook, "\varepsilon"] \arrow[d] & \mathcal{P}_C \arrow[d] \arrow[dr] & & Y \arrow[dl] \\ X\times\mathbb{P}^1 \arrow[r, hook] & \mathcal{P} & C & \end{tikzcd}$$

Definimos $S := \mathcal{E}^* \nu_* \mu^* \mathcal{L}$ fibrado vect en $X \times C$

Geométricamente, la fibra de S sobre $X \times \{c\}$ es un "fibrado espinorial" sobre $Q_{p(c)}$ restringido a X.

§ Fibrados espinoriales.

Recuerdo: Si T es el fibrado tautológico de $G(k,V) =: G$

$T = \{ (\Lambda, v) \in G(k,V) \times V \text{ tq } v \in \Lambda \}$

$\cap$

$V_G = G(k,V) \times V$ fibr trivial

$\Rightarrow 0 \to T \to V_G \simeq \mathcal{O}_G^{\oplus \dim V} \to K = \text{cociente} \to 0$

fibra de K en $[\Lambda] \simeq V/\Lambda$.

Teo (Ottaviani): Si Q cuádrica suave

① Si $\dim(Q)$ impar $\Rightarrow \exists!$ fibrado espinorial S en Q.

② Si $\dim(Q)$ par $\Rightarrow \exists\, 2$ fibrados " $S, \tilde{S}$ en Q.

En dim bajas:

dim 1 : $Q \simeq \mathbb{P}^1$ $\quad S \simeq \mathcal{O}(1)$

dim 2 : $Q \simeq \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ $\quad S, \tilde{S} \simeq \mathcal{O}(1,0), \mathcal{O}(0,1)$

dim 3 : $Q \simeq LG(2,4)$ $\quad S \simeq K|_{LG(2,4)}$

dim 4 : $Q \simeq G(2,4)$ (Plücker) $\quad S, \tilde{S} \simeq T^\vee, K$

T = tautológico.

Teo (Kapranov): Si Q cuádrica suave de dim d

$\rightarrow$ ① d par $\Rightarrow D^b(Q) = \langle \mathcal{O}(-d+1), \dots, \mathcal{O}, S, \tilde{S} \rangle$

② d impar $\Rightarrow D^b(Q) = \langle \mathcal{O}(-d+1), \dots, \mathcal{O}, S \rangle$