Colecciones excepcionales en superficies simplemente conexas de género cero — 15/10/19, Gion — ①

Meta: Explorar SODs en superficies con $p_g=0$ y π_1 trivial.

→ Problema práctico: Construcción de tales superficies. Una manera que captura muchos (todos?) ejemplos es a través de los $\mathbb{Q}$-Gorenstein smoothings [LeePark 2007].

Singularidades de Wahl: Sean $0<a<n$ enteros con $\mathrm{mcd}(a,n)=1$

$$\mathbb{C}^2 \circlearrowleft (x,y) \overset{A}{\longmapsto} (\mu x, \mu^{na-1} y) \qquad \text{donde } \mu = n^2 \text{ raíz de } 1 \text{ primitiva}$$

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{C}^2 \arrow[d, "n:1"'] \arrow[drr, "n^2:1"] & & \\
\mathbb{C}^2/\langle A^n\rangle \arrow[rr] & & (w^n=uv) \subset \mathbb{C}^3/\tfrac{1}{n}(1,-1,a) \cong \mathbb{C}^2/\langle A\rangle =: \text{Wahl sing.}
\end{tikzcd}$$

A^n: $(x,y)\mapsto(\mu^n x, \mu^{-n} y)$

$u=x^n$, $v=y^n$, $w=xy$

$\mathbb{C}^2/\langle A^n\rangle = A_{n-1}: (w^n=uv)\subset \mathbb{C}^3 \circlearrowleft \mathbb{Z}/n$, $(u,v,w)\mapsto(\mu^n u, \mu^{-n} v, \mu^{na} w)$

Para la suavización $(w^n+t=uv)\subset\mathbb{C}^3$ obtenemos suavización $(w^n+t=uv)\subset \mathbb{C}^3/\tfrac{1}{n}(1,-1,a)\times\mathbb{C}$ ★.

obs/.- La fibra de Milnor tiene $b_1=0$. Se puede mostrar que una sing. de Wahl $\iff$ una l.t. con suavización con # Milnor $=0$. Esta suavización es única.

Def/.- Sea W = superficie projectiva con sólo sing. de Wahl. Una $\mathbb{Q}$-Gorenstein smoothing de W es una deformación $W\subset \mathcal{W}\to 0\in\mathbb{D}=\{z\in\mathbb{C}: |z|<1\}$ tal que localmente alrededor de cada sing de Wahl es ★. Así su fibra general es suave W_t, se tiene $K^2_{W_t}$ constante, $p_g(W_t)$ y $q(W_t)$ constante, $\pi_1(W_t)$ puede no serlo, K_{W_0} neg $\Rightarrow K_{W_t}$ neg $\forall t$.

¿Cómo construir W y $\mathcal{W}$? Típicamente no explícito. Siguiendo [LeePark 07]:

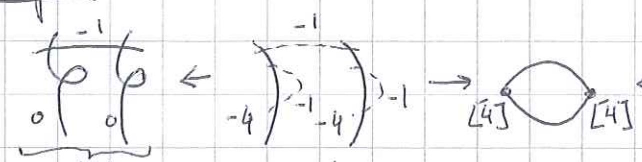
(1) Conf. curvas $\subset S$ = suave $\rightsquigarrow S \leftarrow Bl(S) \supset$ Divisores excepcionales de Wahl $\rightsquigarrow Bl(S) \xrightarrow[\text{contr.}]{} W$ contracción por Teo. Artin (varios!)

(2) Mostrar que W no tiene obstrucciones en deformación: $H^2(W,T_W)=0$

Si queremos algo interesante:

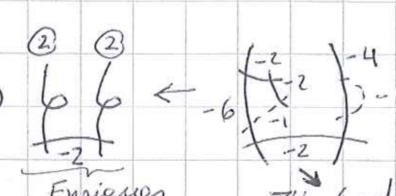
(3) Mostrar que K_W es neg a través de Nakai-Moishezon.

Ejemplos :

(1) 

← Enriques surface

sup. eléptica rac. con sections

(2) 

Enriques

$\mathbb{Z}/2$-Godeaux

(3) Mostrar que a través de °φ + blow-ups, uno obtiene todos los sing. de Wahl.
Tomar φφ y construir W con (a_i, n_i) $i=1,2$ tal que $\mathrm{mcd}(n_1,n_2)=1$ ⇒ Fibra general es una superficie de Dolgachev D_{n_1,n_2}, ie, tiene fibración eléptica con 2 fibras mult. multiplicidad n_1, n_2, $\kappa=1$, $p_g=q=0$, π_1 trivial.

Meta : Construir colecciones excep. en D_{n_1,n_2} a través de W.

→ Pero antes, ¿Qué sabemos en general para $p_g=q=0$?

I. Definición objeto excepcional $E\in\mathcal{D}^b(X)$ es $\mathrm{Hom}(E,E[\ell]) = \begin{cases}\mathbb{C} & \text{si } \ell=0\\ 0 & \text{si } \ell\neq 0\end{cases}$
y así todo line bundle en X es excepcional ($p_g=q=0$).

II. Una colección excepcional es un conj. finito de objetos excepcionales $E_1,\dots,E_n$ tal que $\mathrm{Hom}(E_i,E_j[\ell])=0$ $\forall i>j$, $\forall \ell\in\mathbb{Z}$. Tal colección define una SOD $\mathcal{D}^b(X)=\langle E_1,\dots,E_n,\mathcal{A}\rangle$ donde $\mathcal{A}=\{T\in\mathcal{D}^b(X) : \mathrm{Hom}(T,E_i)=0 \ \forall i\}$.
Si $\mathcal{A}=0$ ⇒ se dice que la colección es **FULL**. Una SOD $\langle\mathcal{A},\mathcal{B}\rangle$ produce $K_0(X)=K_0(\mathcal{A})\oplus K_0(\mathcal{B})$ (notar isom $K_0(\mathcal{D}^b(X))$ con Δ exactos) y $K_0(\text{excep.})\simeq\mathbb{Z}$ con lo cual $K_0(X)=\mathbb{Z}^n\oplus K_0(\mathcal{A})$ para SOD $\langle E_1,\dots,E_n,\mathcal{A}\rangle$ de arriba.
Pero (ver Hartshorne Ap. A) tenemos que el chern character $ch(\mathcal{E})=\sum_{i=1}^{r} e^{a_i}$ [donde $\mathcal{E}$ vector bundle y $c_t(\mathcal{E})=c_0(\mathcal{E})+c_1(\mathcal{E})t+\dots+c_r(\mathcal{E})t^r=\prod_{i=1}^{r}(1+a_it)$] extiende a un isomorfismo de anillos $ch: K_0(X)_{\mathbb{Q}}\to A(X)\otimes\mathbb{Q}$, donde $A(X)$ es el anillo de Chow. En nuestro caso $A(X)=\mathbb{Z}\oplus\mathrm{Pic}(X)\oplus A^2(X)$ y así en nuestro $p_g=q=0$ caso: $n\leq 1+b_2+\text{rango}(A^2(X))$, $\exists\, A^2(X)\twoheadrightarrow\mathbb{Z}$ dado por grado ⇒ $n\leq e(X)$. [Bloch Conj: Sup. con $p_g(S)=q(S)=0$ tienen $A^2(S)\simeq\mathbb{Z}$] [se sabe para $\kappa<2$ y varios ejemplos en $\kappa=2$]. Más π_1 trivial ⇒ $\mathrm{Pic}\simeq\mathbb{Z}^\rho$, $\rho=b_2$. Se cree que Full ⇒ racional en general, así aunque $n=e(X)$, se espera $\mathcal{A}\neq 0$. Si $K_0(\mathcal{A})=0$ y $HH_\bullet(\mathcal{A})=0$ ⇒ se habla de Categoría Fantasma ($HH_k(X)\simeq \bigoplus_{q-p=k} H^{p,q}(X)$ Hochschild homology)

[X = suave proy sup, Bloch conj ✓ $\Rightarrow K_0(X) \simeq \mathbb{Z}^2 \oplus \mathrm{Pic}(X)$] (Lemma 2.7 Galkin-Shinder) ③

Así si Bloch conj ✓ en $p_g = q = 0$, $\pi_1 = 1$, max length alcanzado $\Rightarrow$ se espera Fantasma.
[ya que $HH_\bullet(X) = \mathbb{C}^{e(X)}$ y "$HH_\bullet(X) = HH_\bullet(A) \oplus HH_\bullet({}^\perp A)$"]
El uso de Hochschild cohomology será clave para mostrar fantasmas a través de ciertas ALTURAS de Kuznetsov.

III Un primer acercamiento a colecciones excepcionales de largo máximo es a través
(c.e.n.) de colecciones excepcionales numéricas: Para $E, F \in D^b(X)$ se define el Euler bilinear pairing $\chi(E,F) := \sum_\ell (-1)^\ell \dim_{\mathbb{C}} \mathrm{Hom}(E, F[\ell])$.
Numérico exceptional E si $\chi(E,E) = 1$. Colección numérica excepcional $(E_1, \dots, E_r)$ si $\chi(E_j, E_i) = 0 \quad \forall j > i$.

__Teorema__ (Perling 2018): Para $E_1, \dots, E_n$ de largo máximo numérico en $p_g = q = 0$ superficie $\Rightarrow$ se puede mutar a obj. numericamente __line bundles__ y se le puede hacer corresponder una superficie tórica Y con solo sing. de Wahl (o puntos suaves) en los puntos distinguidos tal que si X es racional $\Rightarrow$ un $\mathbb{Q}$-Gor. smooth de Y es X y la colección viene de Hacking.

__Teorema__ (Vial 2017): Sea X = sup. proy. suave con $\chi(\mathcal{O}_X) = 1$ y sea $r \geq 0$ entero.

$(E_0, E_1, \dots, E_{r+1})$ c.e.n. de line bundles $\iff$ $(E_0, \dots, E_{r+1})$ c.e.n. de n. line bundles $\iff$ $\exists D_1, \dots, D_{r+1} \in NS(X)$ tal que $K_X \cdot D_i = -2 - (D_i)^2 \ \forall i$ y

[except object rank = 1 [$\dim_{K(X)} \mathcal{L}_\eta = 1$] $\Rightarrow c_1 = 0$]

$$(D_i \cdot D_j) = \begin{pmatrix} a_1 & 1 & & \\ 1 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & 1 \\ & & 1 & a_{r+1} \end{pmatrix}$$

numerical rational chain

__Dem__: (i) $\Rightarrow$ (ii) ✓ (ii) $\Rightarrow$ (iii) Definir $D_i := c_1(E_i) - c_1(E_{i-1})$. Luego para $0 \leq i < j \leq r+1$

$\chi(E_j, E_i) = 0 \Rightarrow (D_{i+1} + D_{i+2} + \dots + D_j)^2 + K_X \cdot (D_{i+1} + \dots + D_j) = -2$.

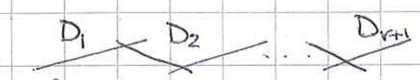
$j = i+1 \Rightarrow K_X \cdot D_i = -2 - D_i^2 \ \forall i$. $j = i+2 \Rightarrow D_k \cdot D_\ell = 1 \ |k-\ell| = 1$. $j = i+3, i+4, \dots \ D_i \cdot D_j = 0 \ |i-j| > 1$

(iii) $\Rightarrow$ (i) $E_0 := \mathcal{O}_X$, $E_i := \mathcal{O}_X(D_1 + \dots + D_i)$ $1 \leq i \leq r+1$. Como $\chi(\mathcal{O}_X) = 1$

$\Rightarrow \chi(E_i, E_i) = 1 \ \forall i$ por R-R $\chi(E_j, E_i) = 0 \ \forall 0 \leq i < j \leq r+1$

donde $\chi(E,F) = \frac{1}{2}(c_1(F) - c_1(E))^2 - \frac{1}{2} K_S \cdot (c_1(F) - c_1(E)) + 1$ para n line bundles en $\chi(\mathcal{O}_X) = 1$.

I obs.- En $p_g = q = 0$ tenemos que



con $D_i = \mathbb{P}^1$ da una colección excepcional de line bundles $\langle \mathcal{O}_X, \mathcal{O}_X(D_1), \mathcal{O}_X(D_1 + D_2), \dots, \mathcal{O}_X(D_1 + \dots + D_{r+1}) \rangle$.

Ej.: Tóricos, $\underbrace{A_9 \subset \text{Enriques}}_{\text{From } \mathbb{Q}\text{-Gor. def.}}$, $A_8 \underset{?}{\subset}$ Gen. type ($\mathbb{Q}$-Homology $\mathbb{CP}^2$)