Obs: X esp. topológico.
Categoría: objetos: abiertos
Morfismos: $Hom(\mathcal{U},V)=\begin{cases}\emptyset & \text{si } U\not\subseteq V\\ i: U\hookrightarrow V & \text{si } U\subseteq V\end{cases}$ } $\mathcal{C}$

Pre-haz: functor contravariante $\mathcal{C}\to$ sets
haz: $\mathcal{F}:\mathcal{C}\to$ sets si $S\in\mathcal{F}(\mathcal{U})$, $\bigcup_\alpha \mathcal{U}_\alpha=\mathcal{U}$ queremos
(1) S esté determinado por $S|_{\mathcal{U}_\alpha}$.
(2) si $\{S_\alpha\in\mathcal{F}(\mathcal{U}_\alpha)\}$ con $S_\alpha|_{\mathcal{U}_\alpha\cap\mathcal{U}_\beta}=S_\beta|_{\mathcal{U}_\alpha\cap\mathcal{U}_\beta}$
$\Rightarrow \exists\, S\in\mathcal{F}(\mathcal{U})$ tq $S|_{\mathcal{U}_\alpha}=S_\alpha$.

$\therefore$ Haz $\Leftrightarrow$ $\mathcal{F}(\mathcal{U})\to\prod_\alpha\mathcal{F}(\mathcal{U}_\alpha)\underset{\delta_2}{\overset{\delta_1}{\rightrightarrows}}\prod_{\alpha,\beta}\mathcal{F}(\mathcal{U}_\alpha\cap\mathcal{U}_\beta)$ exacto.

Def.- Topología de Grothendieck en una categoría $\mathcal{C}$: Una asignación de cubrimientos a cada objeto $\mathcal{U}\in\mathcal{C}$. Esto es, a cada $\mathcal{U}\in\mathcal{C}$ le asignamos una colección de morfismos $\{\mathcal{U}_\alpha\to\mathcal{U}\}_\alpha$ en $\mathcal{C}$ tq
(1) Existen productos fibrados en $\mathcal{C}$
(2) si $V\to\mathcal{U}$ es isomorfismo $\Rightarrow\{V\to\mathcal{U}\}$ es cubrimiento.
Si $\{\mathcal{U}_i\to\mathcal{U}\}$ es cubrimiento, $\{\mathcal{U}_{ij}\to\mathcal{U}_i\}$ es cubrimiento
$\Rightarrow\{\mathcal{U}_{ij}\to\mathcal{U}\}$ es cubrimiento.
(3) Si $V\to\mathcal{U}$ es morfismo y $\{\mathcal{U}_i\to\mathcal{U}\}$ cubrim, entonces $\{\mathcal{U}_i\times_{\mathcal{U}}V\to V\}$ es cubrimiento.

Pre-Haz: Functor contravariante $\mathcal{F}:\mathcal{C}\to$ sets.

Haz: Pre-haz $\mathcal{F}$ tal que $\mathcal{F}(\mathcal{U})\to\prod_\alpha\mathcal{F}(\mathcal{U}_\alpha)\rightrightarrows\prod_{\alpha,\beta}\mathcal{F}(\mathcal{U}_\alpha\times_{\mathcal{U}}\mathcal{U}_\beta)$ exacto $\forall$ cubrimiento $\{\mathcal{U}_\alpha\to\mathcal{U}\}$ de $\mathcal{U}$.

Def.- Topología de Grothendieck en una categoría es un SITE.

Ejm Top. étale de X esquema.

objetos: $\pi: \mathcal{U} \to X$ étale

cubrimientos: $\mathcal{U}_\alpha \xrightarrow{F_\alpha} \mathcal{U}$ (sobre X) tal que $\bigcup F_\alpha(\mathcal{U}_\alpha) = \mathcal{U}$.

nueve (?)

Sea S = esquema. $F(S) = \{ X \underset{\substack{\text{proyec} \\ \text{plano}}}{\xrightarrow{\pi}} S \ / \ \pi^{-1}(s)$ es curva género $g \} / \simeq$

Topología de Moduli: curva de género g $\pi: X \to S$ es un morfismo plano, proyectivo, cuyas fibras son conexas, reducidas, unidimensional con $h^1(X_s, \mathcal{O}_{X_s}) = g$.

$\mathcal{C}$: objetos: Familias de curvas de género g $\pi: X \to S$

morfismos:
$$\begin{array}{ccc} X & \longrightarrow & X' \\ {\scriptstyle\pi}\downarrow & \circlearrowleft & \downarrow{\scriptstyle\pi'} \\ S & \longrightarrow & S' \end{array} \qquad X \simeq S \times_{S'} X' \quad \text{con } S \to S' \text{ étale}.$$

Hecho interesante: En $\mathcal{C}$, existen productos absolutos.

Agregamos un objeto terminal M.

Cubrimientos: $\{ f_\alpha : \pi_\alpha \to \pi \}$ cub. de $\pi: X \to S$

Si
$$\begin{array}{ccc} X_\alpha & \longrightarrow & X \\ \downarrow & & \downarrow \\ S_\alpha & \xrightarrow{P_\alpha} & S \end{array} \qquad \bigcup_\alpha P_\alpha(S_\alpha) = S$$

$\{\pi_\alpha\}_\alpha$ es cub. de M si cada curva aparece en alguna familia π_α.

Haz invertible: $\forall$ familia $\pi: X \to S$ en M un haz invertible $L(\pi)$ en S y para todo morfismo de familias
$$\begin{array}{ccc} X_1 & \to & X_2 \\ {\scriptstyle\pi_1}\downarrow & f & \downarrow{\scriptstyle\pi_2} \\ S_1 & \to & S_2 \end{array}$$
un isomorfismo $L(\pi_1) \simeq f^* L(\pi_2)$. Es un haz!

Ej/r $\mathcal{O}(\pi : X \to S) := \Gamma(S, \mathcal{O}_S)$.

Cálculo de Mumford ; $(g=1)$ L haz invertible

$\pi_A : C_A \to \operatorname{Spec} k$ con aut $\mathbb{Z}/4$ $\pi_B : C_B \to \operatorname{Spec} k$ con aut $\mathbb{Z}/6$

$L(\operatorname{Spec} k)$ esp. vect. de dim 1. y con la involución un ± 1.

$\therefore$ $\operatorname{Pic}(\mathcal{M}) \longrightarrow \mathbb{Z}/12$ por Mumford y él muestra que es isomorfismo.

y $\operatorname{Pic}(\mathcal{M}) = \langle \Lambda \rangle$, $\Lambda(X \xrightarrow{\pi} S) = R^1\pi_* \mathcal{O}_X$.