Imágenes directas y Teo Leray (sucesión espectral) ①

RODRIGO
COBORNIU
25-10-13

Obj.- Dado $f: X \to Y$ cont. Queremos relacionar cohomología de $\mathcal{F} \in \mathcal{Ab}(X)$ con $f_*\mathcal{F}$ en Y.

Def.- Dado $f: X \to Y$ cont. Definimos $R^i f_*$ como los functores derivados derechos de f_*.
(recuerdo: $f_*\mathcal{F}(V) = \mathcal{F}(f^{-1}(V))$ $V \subset Y$ abierto)

Prop.- $f: X \to Y$ cont. $\mathcal{F} \in \mathcal{Ab}(X) \Rightarrow R^i f_*(\mathcal{F})$ es el haz asociado al pre-haz: $V \mapsto H^i(f^{-1}(V), \mathcal{F}|_{f^{-1}(V)})$.

Dem.- Sea $V \subseteq Y$ abierto. Dado $0 \to \mathcal{F}' \to \mathcal{F} \to \mathcal{F}'' \to 0$ exacto
$\Rightarrow 0 \to \mathcal{F}'|_{f^{-1}(V)} \to \mathcal{F}|_{f^{-1}(V)} \to \mathcal{F}''|_{f^{-1}(V)} \to 0$ exacto

Prehaz
$$\Rightarrow 0 \to H^0(f^{-1}(V), \mathcal{F}'|_{f^{-1}(V)}) \to H^0(f^{-1}(V), \mathcal{F}|_{f^{-1}(V)}) \to H^0(f^{-1}(V), \mathcal{F}''|_{f^{-1}(V)}) \xrightarrow{\delta} H^1(f^{-1}(V), \mathcal{F}'|_{f^{-1}(V)}) \to \cdots$$

∴ Como tengo sucesión larga $\forall V$ abierto de Y tengo
Sea $\mathcal{H}^i(X, \mathcal{F})$ el haz asociado a $V \mapsto H^i(f^{-1}(V), \mathcal{F}|_{f^{-1}(V)})$.

en Pre-haces. ~~Haz~~ haz asociado a pre-haz es exacto.
$\Rightarrow$ Tengo sucesión larga para $\mathcal{H}^i(X, \mathcal{F})$.
$\Rightarrow \{\mathcal{H}^i(X, -)\}_{i \geq 0}$ es δ-functor.
Notar que $\mathcal{H}^0(X, \mathcal{F}) = f_*\mathcal{F}$.

∴ Solo necesitamos que sea universal.
P.d. que es borrable: Pero $0 \to \mathcal{F} \to \mathcal{J}^\cdot$ con $\mathcal{J}^\cdot$ inyectivo
notar que $\mathcal{J}^\cdot|_{f^{-1}(V)}$ también es inyectivo.
$\Rightarrow \mathcal{H}^i(X, \mathcal{J}^\cdot) = 0$ $\forall i > 0$. Luego $\mathcal{H}^i(X, -)$ es borrable y entonces es δ-functor universal ∎

<u>Cor</u> | a) $\forall V \subseteq Y$ abierto $R^i f_*(\mathcal{F})|_V = R^i f'_*(\mathcal{F}|_{f^{-1}(V)})$
donde $f' : f^{-1}(V) \to V$ es f restr. a $f^{-1}(V)$.
b) Si $\mathcal{F}$ es flasque, entonces $R^i f_*(\mathcal{F}) = 0 \ \forall i > 0$.

<u>Dem</u> | a) juego de límites b) Flasque $\Rightarrow$ ~~esto~~ trivialmente ∎

<u>Prop</u> | $X \xrightarrow{f} Y$ morfismo espacios anillados $\Rightarrow$ $R^i f_*$ se pueden calcular en $Mod(X)$ (Prop. 2.4, lo mismo) ∎

<u>Prop</u> | Sea X Noeth. y $f : X \to Y$ morfismo con $Y = \operatorname{Spec} A$.
$\Rightarrow \forall \mathcal{F} \in Qcoh(X) \Rightarrow R^i f_*(\mathcal{F}) = H^i(X, \mathcal{F})^\sim$.

<u>Dem</u> | Notar que $f_*\mathcal{F}$ es cuasi-coherente (II. 5.8.c)
- $f_*\mathcal{F} = \Gamma(Y, f_*\mathcal{F})^\sim = \Gamma(X, \mathcal{F})^\sim = H^0(X, \mathcal{F})^\sim$.
- Pero además $(\_)^\sim$ es exacto para $Mod(A)$.

Entonces $\mathcal{F} \mapsto H^i(X, \mathcal{F})^\sim$ es un δ-functor.
Además si $0 \to \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ inyectivo $\Rightarrow H^i(X, \mathcal{G}) = 0$
$\Rightarrow H^i(X, \mathcal{G})^\sim = 0$. $\therefore$ δ-functor universal.
$R^i f_* \simeq H^i(X, \_)^\sim$ ∎

<u>Cor</u> | X Noetheriano y $f : X \to Y$ morfismo $\Rightarrow \forall \mathcal{F}$ cuasi-coherente
$\Rightarrow R^i f_*(\mathcal{F})$ es cuasi-coh. $\forall i$.

Dado $\mathcal{U}$ afín en Y, $R^i f_*(\mathcal{F})|_{\mathcal{U}} = H^i(f^{-1}(\mathcal{U}), \mathcal{F}|_{f^{-1}(\mathcal{U})})^\sim$
(Pegado que H^i de fibras alrededor de Y).

<u>Prop.</u> : Sea $f : X \to Y$ morfismo de esquemas separables.
Sea $\mathcal{F}$ cuasi-coher. sobre X y $\mathcal{U} = \{\mathcal{U}_i\}$ cub. abiertos afín de X
$\check{\mathcal{C}}^\cdot(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ resol. de Čech de $\mathcal{F}$.
$\Rightarrow \forall p \geq 0$, $R^p f_*(\mathcal{F}) = h^p(f_*(\check{\mathcal{C}}^\cdot(\mathcal{U}, \mathcal{F})))$.

Teo : $f: X \to Y$ proyectivo entre esquemas Noeth.
Sea $\mathcal{O}_X(1)$ haz inv. muy amplio de X sobre Y,
y sea $\mathcal{F}$ un haz ~~[illegible]~~ coh. en X.
$\Rightarrow$ 1) $\forall n \gg 0$ el morfismo $f^*(f_*(\mathcal{F}(n))) \twoheadrightarrow \mathcal{F}(n) \simeq \mathcal{F} \otimes \mathcal{O}_X(n)$
2) $\forall i \geq 0$, $R^i f_*(\mathcal{F})$ es coherente.
3) $\forall i > 0$, $n \gg 0$ $R^i f_*(\mathcal{F}(n)) = 0$.

Dem/. 2) y 3) son cálculos locales.

1) local también. Asumir $Y = \operatorname{Spec} A \Rightarrow f_* \mathcal{F}(n) = \Gamma(X, \mathcal{F}(n))^\sim$ como A-módulo

(ver Dag p. 121) $\Rightarrow f^* f_* \mathcal{F}(n)$ = haz $\mathcal{O}_X$-mod generado por secciones de $\mathcal{F}(n)$). Pero por Hart II 5.17,
$\mathcal{F}(n)$ es generado por secciones globales y así el mapeo $f^* f_* \mathcal{F}(n) \to \mathcal{F}(n)$ es sobre ∎

Ex1/.- $X \xrightarrow{f} Y$ continua $\mathcal{F} \in Ab(X)$ si $R^i f_* \mathcal{F} = 0 \ \forall i > 0$.
$\Rightarrow H^i(X, \mathcal{F}) \simeq H^i(Y, f_* \mathcal{F}) \ \forall i \geq 0$.

Dem : $0 \to \mathcal{F} \to \mathcal{Y}_0 \to \mathcal{Y}_1 \to \cdots$ inye. ($\mathcal{J}_i$ flasque)
$\Rightarrow 0 \to f_* \mathcal{F} \to f_* \mathcal{Y}_0 \to f_* \mathcal{Y}_1 \to \cdots$ es exacto $h^i(f_* \mathcal{Y}_\cdot) = R^i f_* \mathcal{F} = 0$.
$\Rightarrow$ Tomar cohom con $\Gamma(Y, \_\_)$
$(\Gamma(Y, f_* \_\_) = \Gamma(X, \_\_))$ ∎

Ex2/.- $X \xrightarrow{f} Y$ afín con X noeth y $\mathcal{F}$ cuasi-coh. $\Rightarrow R^i f_* \mathcal{F} = 0 \ \forall i > 0$

Dem : $V \subseteq Y$ abierto afín $\Rightarrow R^i f_* \mathcal{F}|_V = R^i f_* \mathcal{F}|_{f^{-1}(V)}$
Pero $f^{-1}(V)$ es afín por definición de f = afín
Como $f^{-1}(V)$ es afín y Noeth y tenemos $\mathcal{F}|_{f^{-1}(V)}$ es cuasi-coh.
$\Rightarrow H^i(f^{-1}(V), \mathcal{F}|_{f^{-1}(V)}) = 0 \ \forall i > 0$ (anulación de Serre)
pero localmente $H^i(f^{-1}(V), \mathcal{F}|_{f^{-1}(V)})^\sim = 0$ ∎