Sucesión espectral de Leray (REFERENCIA: Apuntes de Geom. algebraica por Mumford-Oda) (1)

R. Codornú

Obj.: Si $f: X \to Y$ es morfismo y $\mathcal{F}$ haz cuasi-coh. en X
¿Se puede reconstruir la cohomología de $\mathcal{F}$ con los $R^i f_* \mathcal{F}$?

Def.- Una sucesión espectral (convergente) $E_2^{pq} \Rightarrow E^n$ consiste de dos paquetes de información:

A) Una colección de grupos abelianos E_2^{pq} $(p, q \geq 0)$, llamados términos iniciales, más filtraciones:

$$E_2^{pq} = Z_2^{pq} \supset Z_3^{pq} \supset \cdots \supset B_4^{pq} \supset B_3^{pq} \supset B_2^{pq} = (0)$$

y también definimos

$$Z_\infty^{pq} = \bigcap_v Z_v^{pq} \quad B_\infty^{pq} = \bigcup_v B_v^{pq} \quad E_\infty^{pq} = Z_\infty^{pq} / B_\infty^{pq}$$

y una familia de morfismos $d_v^{pq}: Z_v^{pq} \longrightarrow Z_v^{p+v, q-v+1} / B_v^{p+v, q-v+1}$

~~que permiten definir los~~ $\cancel{Z_{pq}}$ satisfacen:

i) $B_v^{pq} \subset \ker(d_v^{pq})$, $Z_v^{p+v, q-v+1} \supset \operatorname{Im} d_v^{pq}$
de modo que se puede inducir $Z_v^{pq}/B_v^{pq} \to Z_v^{p+v, q-v+1}/B_v^{p+v, q-v+1}$
y al cociente Z_v^{pq}/B_v^{pq} lo llamamos E_v^{pq}

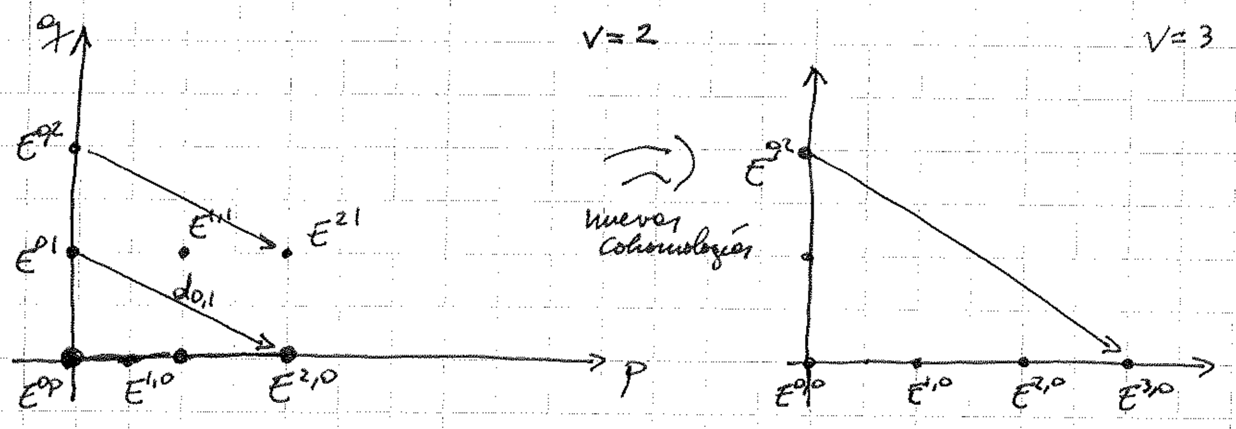
ii) $d^2 = 0$

iii) $Z_{v+1}^{pq} = \ker(d_v^{pq})$, $B^{p-v, q-v+1} = \operatorname{Im}(d_v^{pq})$
E_{v+1}^{pq} son las cohomologías de los E_v^{pq}.

B) Un "límite" de una sucesión $E^n, n \geq 0$, cada uno filtrado de modo tal que los cocientes sucesivos son los $E_\infty^{p,n-p}$

$$E^n = F^0(E^n) \supset F^1(E^n) \supset \dots \supset F^{n+1}(E^n) = 0$$

$$E_\infty^{0,n} \qquad E_\infty^{1,n} \qquad E_\infty^{n,0}$$



$\Downarrow$ más

si estanca

Obs.- 1) Notar que $E_2^{\infty} \simeq E^0 \Rightarrow E^0 \simeq E_\infty^\infty$ y $Z_2^\infty = E_2^\infty \Rightarrow$ límite.

$B_2^\infty = (0) \quad \Rightarrow \quad E_\infty^\infty \simeq E_2^\infty$.

2) Sucesión exacta de los grados bajos. (Consecuencia formal)

Dada cualquier cosa convergente, se tiene

$$0 \to E_2^{1,0} \to E^1 \to E_2^{0,1} \xrightarrow{d_2^{01}} E_2^{2,0} \to E^2$$

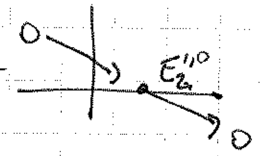
En efecto, en E^1 tenemos

$$\underbrace{E^1 = F^0 \supset F^1}_{E_\infty^{0,1}} \supset F^2 = (0) \qquad E_\infty^{1,0} = F_1$$

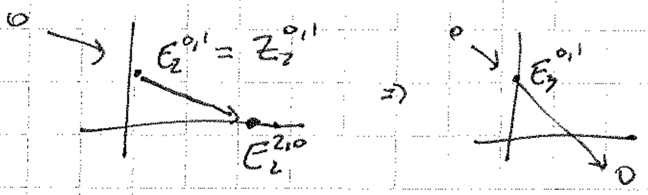
$$E_\infty^{1,0}$$

$$\Rightarrow \quad 0 \to E_\infty^{1,0} \to E^1 \to E_\infty^{0,1} \to 0$$

Ahora $E_\infty^{1,0} = E_2^{1,0}$ porque



También $E_\infty^{0,1} \subseteq E_2^{0,1}$. En efecto,



y $B_3^{0,1} = 0$ y $B_v^{0,1} = 0 \ \forall v$.

$$\therefore \quad E_2^{0,1} = Z_2^{0,1} \supset Z_3^{0,1} \supset (0) . \quad \Rightarrow E_\infty^{0,1} \simeq Z_3^{0,1} \leq E_2^{0,1}.$$

$$\therefore \quad 0 \to E_2^{1,0} \to E^1 \to E_2^{0,1} \xrightarrow{d_2} E_2^{2,0} \qquad \ker d_2 = Z_3^{0,1}.$$

... usar filtración para terminar (de $E_2^{2,0}$).

(3) $\forall n$ tenemos "morfismos frontera" : $E_2^{n,0} \xrightarrow{\pi} E_\infty^{n,0} \hookrightarrow E^n$
$E^n \xrightarrow{\pi} E_\infty^{0,n} \hookrightarrow E_2^{0,n}$.

<u>Teor</u>. (Leray) Sean X, Y esquemas separados, $f : X \longrightarrow Y$ cuasi-compacto y $\mathcal{F}$ es quasi-coherente.

$\Rightarrow$ Existe una sucesión espectral (llamada de Leray) con términos iniciales: $E_2^{p,q} = H^p(Y, R^q f_*(\mathcal{F}))$ y límite $H^n(X, \mathcal{F})$.

<u>Dem</u>: Sean $\mathcal{U} = (U_\alpha)$, $\mathcal{V} = (V_\beta)$ cubrimientos afines de Y y X resp.

$$C^{p,q} = \prod_{\alpha_0, \ldots, \alpha_p \in S} \ \prod_{\beta_0, \ldots, \beta_q \in T} \mathcal{F}(f^{-1}(U_{\alpha_0} \cap \cdots \cap U_{\alpha_p}) \cap V_{\beta_0} \cap \cdots \cap V_{\beta_q})$$

Notar que $C^{p,q}$ es un Doble complejo $\delta_1 : C^{p,q} \longrightarrow C^{p+1,q}$ (generalización de Čech) y $\delta_2 : C^{p,q} \to C^{p,q+1}$

$$\therefore \quad \begin{array}{ccccc} & & \vdots & & \\ C^{02} & \to & \bullet & \to & \bullet \\ \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\ C^{01} & \to & \bullet & \to & \bullet \quad \cdots \\ \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\ \bullet & \to & \bullet & \to & \bullet \\ C^{00} & & C^{10} & & C^{20} \end{array}$$

y tenemos el complejo total: $C^{(n)} = \sum_{p+q=n} C^{p,q}$

con frontera $d = \delta_1 + (-1)^p \delta_2 : C^{(n)} \to C^{(n+1)}$ (coord a coord.)

Con q fijo, $q \geq 0$, usar teo anulación de Serre:

$C^{0q} \to C^{1q} \to \cdots \to \cdots$ exacta y

Así la cohomología es cero salvo al comienzo.

y la cohomología en cero es $\prod_{\beta_0,\dots,\beta_q \in T} \mathcal{F}(V_{\beta_0},\dots,V_{\beta_q}) = C^q(V,\mathcal{F})$

V cubrimiento de X

$$\Rightarrow \begin{tikzcd} C^2(V,\mathcal{F}) & 0 & 0 \\ C^1(V,\mathcal{F}) \arrow[u] & 0 \arrow[u] & 0 \arrow[u] & \cdots & \Rightarrow \text{cohom. de } \mathcal{F} \\ C^0(V,\mathcal{F}) \arrow[u] & 0 \arrow[u] & 0 \arrow[u] \end{tikzcd}$$

<u>Lema fácil</u>: $(C^{p,q}, \delta_1, \delta_2)$ doble complejo y suponer cohomología horizontal $=0$ para $p>0$ (como arriba)
$\Rightarrow \exists$ isomorfismo (cohom. vertical de los $H^{0,q}_{\delta_1}$) $\simeq$ (cohología de $C^{(n)}$).

Ahora la cohomología vertical en p es $\simeq \prod_{\alpha_0,\dots,\alpha_p} R^q f_* \mathcal{F}(\mathcal{U}_{\alpha_0} \cap \cdots \cap \mathcal{U}_{\alpha_p})$ y $\delta_1 : C^{p,q} \to C^{p+1,q}$ induce entre cohom verticals ~~morfismos~~

$C^q(R^2) \to C^1 \to \cdots$

$C^q(R^1) \to C^1 \to \cdots$

$C^q(R^0) \to C^1 \to \cdots$

Cohomología

$E_2^{0,1} = H^0(R^1_* \mathcal{F}) \qquad H^1(R^1_* \mathcal{F}) = E_2^{1,1}$

$$\begin{array}{ccc} H^0(f_* \mathcal{F}) & H^1(f_* \mathcal{F}) & \cdots \\ \| & \| & \\ E_2^{0,0} & E_2^{1,0} & \end{array}$$

<u>Teor</u>. Esto es lo del comienzo: Convergiendo $H^n(X,\mathcal{F})$ a lo de $C^{(n)}$ Fácil