Morfismos planos

Robert Auffarth, 20-11-13

→ R anillo, M R-módulo.

Def: M es plano si el functor $N \mapsto N \otimes_R M$ es exacto.

Fácil: M plano $\Leftrightarrow$ $\forall I \subseteq R$ f.g., $I \otimes_R M \to R \otimes_R M = M$.

No Ej: $0 \to \mathbb{Z} \xrightarrow{n} \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/n \to 0$ $\quad$ $\mathbb{Z}/n$ no es plano $/_{\mathbb{Z}}$

$\Rightarrow$ $\mathbb{Z}/n \xrightarrow{0} \mathbb{Z}/n \to \mathbb{Z}/n \otimes \mathbb{Z}/n \to 0$.

Ej: Si $S \subseteq A$ conj. mult. $\Rightarrow$ $S^{-1}A$ es plano.

Ej: A DIP $\Rightarrow$ M es plano ssi es libre de torsión.

→ Def: $X \xrightarrow{f} Y$ morfismo de esquemas, $\mathcal{F}$ $\mathcal{O}_X$-módulo

$\mathcal{F}$ es plano en $x \in X$ sobre Y si: $f^{\#}: \mathcal{O}_{Y,f(x)} \to (f_* \mathcal{O}_X)_{f(x)} \to \mathcal{O}_{X,x}$

$\mathcal{F}_x$ es un $\mathcal{O}_{X,x}$-mod y así por $f^{\#}$ un $\mathcal{O}_{Y,f(x)}$-mod, queremos que $\mathcal{F}_x$ sea un $\mathcal{O}_{Y,f(x)}$-mód plano.

$\mathcal{F}$ es plano si lo es $\forall x$; f es plano si $\mathcal{O}_X$ es plano sobre Y.

→ Prop: (a) Toda inmersión abierta es plana.

(b) Si $f: X \to Y$, $\mathcal{F}$ plano $/_Y$, $g: Y' \to Y$ $\Rightarrow$

$$\begin{tikzcd} X \times_Y Y' \arrow[r, "f'"] \arrow[d, "p_1"'] & Y' \arrow[d, "g"] \\ \mathcal{F} \; X \arrow[r, "f"'] & Y \end{tikzcd}$$

Entonces $p_1^* \mathcal{F}$ es plano sobre Y.

(c) $X \xrightarrow{f} Y$, $Y \xrightarrow{g} Z$ $\mathcal{F}$ plano$/_Y$ g plano $\Rightarrow$ $\mathcal{F}$ es plano sobre Z.

(d) $f: \operatorname{Spec} B \to \operatorname{Spec} A$ $\quad M$ B-módulo plano $\Rightarrow$

$\tilde{M}$ es plano sobre $\operatorname{Spec} A$ $\Leftrightarrow$ M es plano sobre A.

(e) Si X noeth y $\mathcal{F}$ es $\mathcal{O}_X$-mód coherente $\Rightarrow$ $\mathcal{F}$ es plano sobre X ssi es localmente libre.

Prop.- $f: X \to Y$ separado de tipo finito. X, Y Noetherianos, $\mathcal{F}$ cuasi-coherente en X, $u: Y' \to Y$ plano, Y noeth.
Entonces $\forall i \geq 0$, $u^* R^i f_*(\mathcal{F}) \simeq R^i g_*(v^* \mathcal{F})$.

$$\begin{tikzcd} X \times_Y Y' \arrow[r, "v"] \arrow[d, "g"] & X \arrow[d, "f"] \\ Y' \arrow[r, "u"] & Y \end{tikzcd}$$

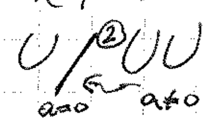
Cor.- Si Y es afín (en el caso anterior), $y \in Y$. Sea $k(y)$ el haz constante en $\overline{\{y\}}$. Entonces, $\forall i \geq 0$,
$$H^i(X_y, \mathcal{F}_y) \simeq H^i(X, \mathcal{F} \otimes k(y))$$

Prop.- $f: X \to Y$ morfismo plano de tipo finito sobre K (algún cuerpo).
$\Rightarrow$ $\dim_x X_{f(x)} = \dim_x X - \dim_{f(x)} Y$, $\dim_x X = \dim \mathcal{O}_{X,x}$

Cor.- $f: X \to Y$ plano tipo fin. $/K$, Y = irred. LSCSE:
(1) Cada comp. irred. de X tiene dim $\dim Y + n$
(2) $\forall y \in Y$ (no nec. cerrado) cada comp de X_y tiene dim n.

Prop.- $X \xrightarrow{f} Y$, Y integral, dim 1 y X red $\Rightarrow$ f plano $\Leftrightarrow$ cada componente irred de X domina a Y.

Ej.- $\operatorname{Spec} K[x,y,z]/(zy - x^2) \to \operatorname{Spec} K[z]$ es plano por prop. anterior.



No Ej.- $X =$  $\xrightarrow{f}$  $= Y$ normalización no es

Prop.- Y regular de dim 1 y $p \in Y$ cerrado. Sea $X \subseteq \mathbb{P}^n_{Y \setminus \{p\}} = \mathbb{P}^n_{\mathbb{Z}} \times (Y \setminus \{p\})$ plano sobre $Y \setminus \{p\}$. Entonces existe un único subesquema $\overline{X} \subseteq \mathbb{P}^n_Y$ plano sobre Y tq $\overline{X}|_{\mathbb{P}^n_{Y \setminus \{p\}}} = X$.