suave y $\pi_1^{ét}$

R. Codorniu
6-12-13

Def: Un morfismo $f: X \to Y$ entre esquemas de tipo finito $/k$. es suave de dim. relativa n si

1) f es plano
2) Si $X' \subseteq X$ e $Y' \subseteq Y$ comp. irred con $f(X') \subset Y'$
$\Rightarrow \dim X' = \dim Y' + n$
3) $\forall x \in X$ (cerrado o no) $\dim_{k(x)} (\Omega^1_{X|Y} \otimes k(x)) = n$

Rec: Si $f: X \to Y$ es un morfismo $\leadsto$ haz de diferenciales $\Omega^1_{X|Y}$.
(recordar B A-módulo, $\Omega^1_{B|A} = {}_A\langle db \rangle / \langle da, d(b+b') - db - db', d(b\cdot b') - b db' - b' db \rangle$)

Ej: Dado Y, $\mathbb{A}^n_Y \to Y$ y $\mathbb{P}^n_Y \to Y$ es suave

Teo: $f: X \to Y$ morfismo esq. tipo finito sobre $k \Rightarrow f$ suave dim rel. n
$\Leftrightarrow$ i) f es flat + ii) $\forall y \in Y$, $X_{\bar{y}} = X_y \otimes \overline{k(y)}$ regular y dim igual en toda componente.

Prop: $X \xrightarrow{f} Y$ morfismo entre var. no sing $|_{k=\bar{k}}$, $n = \dim X - \dim Y$.

f suave dim rel. $n \Leftrightarrow \Omega_{X|Y}$ loc. libre rel $n \Leftrightarrow \forall x \in X$ cerrado el morfismo entre tangente

Lema: $X \xrightarrow{f} Y$ morf. dominante esq. integrales de tipo finito $|_{k=\bar{k}}$
char 0 $\Rightarrow \exists U \subset X$ no vacío tq $f: U \to Y$ es suave.

No ejemplo: $\mathbb{A}^1 \to \mathbb{A}^1$ Frobenius.

Prop: Sea $f: X \to Y$ un morfismo de var. $|_{k=\bar{k}}$ Char 0, y X es no singular
$\Rightarrow \exists V \subset Y$ abierto $\neq \emptyset$, $f^{-1}(V) \to V$ es suave.

Def/r $Y \xrightarrow{f} X$ morfismo loc. tipo finito. f es No ramificado en $y \in Y$ si dado $m_{f(y)}$ y $\mathfrak{n} = \langle f^{\#}(m_{f(y)}) \rangle \subseteq \mathcal{O}_{Y,y}$

$$\Rightarrow \quad \mathcal{O}_{X,f(y)}/m_{f(y)} \hookrightarrow \mathcal{O}_{Y,y}/\mathfrak{n} = \mathcal{O}_{Y,y}/m_y \qquad (\mathfrak{n} = m_y)$$

extensión separable y finito de cuerpos.

Def/r Sea A una k-álgebra, A es "separable" si $\bar{A} = A \otimes_k \bar{k}$ es reducida. A finita gen. k-módulo y separable se dice étale.

Prop/r (1) A es separable (étale)

(2) $\bar{A}$ es isomorfo al prod. de copias de $\bar{k}$ (prod. finito)

(3) A es un prod. finito de extensiones separables de k (las extensiones son finitas)

(4) $\Omega^1_{A/k} = 0$

Prop/r $Y \xrightarrow{f} X$ morfismo loc. de tipo finito LSCSE.

(a) f es no ramificado.

(b) $\forall x \in X \Rightarrow$ $Y \times_X \operatorname{Spec} k(x) \to \operatorname{Spec} k(x)$ es no ramificado

(c) $\forall x \in X$ morf., $Y \times_X \operatorname{Spec} k(x) \to \operatorname{Spec} k(x)$ es no ramificado.

(d) $Y \times \operatorname{Spec} k(x)$ $\forall x \in X$ es una unión de $\operatorname{Spec} k_i$ con k_i ext finita y separable de $k(x)$.

Def/r Un morfismo $f: Y \to X$ es "étale" si es flat, no ramificado.

1) Inmersión abierta es étale 2) Comp. étale es étale 3) Cambio de base de morfismo étale es étale

Def/r Un morfismo $f: Y \to X$ finito es étale finito si

1) f es loc. libre, $f_* \mathcal{O}_Y$ es un $\mathcal{O}_X$-mod loc. libre de rango finito

2) $\forall x \in X$, la fibra $Y \times \operatorname{Spec} k(x)$ es el espectro de una $k(x)$-álgebra étale.

obs) 1) f étale finito $\Rightarrow$ flat
2) $\Rightarrow$ No-ram.

Def) Un cubrimiento étale es un étale finito y sobre.

obs) un punto geom. es $\bar{s} : \operatorname{Spec} \Omega \longrightarrow S$, $\bar{\Omega} = \Omega$.

Puede probar: $X \xrightarrow{f} S$ es étale finito $\Leftrightarrow$ la fibra geométrica $X \times_S \operatorname{Spec} \Omega$ es isom. $\operatorname{Spec} \Omega^n = \coprod \operatorname{Spec} \Omega$.
$\forall \bar{s}$ pto geométrico
$\left(\begin{array}{c} f \text{ finito} \\ X \to S \end{array} \right)$

FIN