Deformaciones (Robert Auffarth)

Problema moduli : functor $F: \text{Sch} \longrightarrow \text{Sets}$ contravariante
$$B \longmapsto \{ \quad \}/\sim$$

Ej: $F(B) = \{ C \to B$ suave plano tq. fibras son curvas suaves de género $g \}$

Def: F es representable si existe un esquema M tal que $F \simeq \{B \mapsto \mathrm{Mor}(B, M)\}$. En este caso, M es un espacio de moduli fino para F.

Ej: F representable, $F(\operatorname{Spec} \mathbb{C}) \approx \mathrm{Mor}(\operatorname{Spec} \mathbb{C}, M) = M(\mathbb{C})$.

$F(B) = \{$ Familias $D \to B$ planas $\}$

$$\begin{array}{ccc} B' \times_B D & \to & D \\ \downarrow & & \downarrow \\ B' & \to & B \end{array}$$

Si M existe $\Rightarrow$ $\begin{array}{c} D \\ \downarrow \\ B \end{array} \rightsquigarrow \begin{array}{l} B \longrightarrow M \\ b \longmapsto D_b \end{array}$.

Viceversa, $1\!\!1: M \to M$ existe una familia $\mathcal{C} \xrightarrow{1\!\!1} M$ corresp. La familia universal universal.

Gracia:
$$\begin{array}{ccc} D & \longrightarrow & \mathcal{C} \\ \downarrow & \square & \downarrow 1\!\!1 \\ B & \longrightarrow & M \end{array}$$
∴ toda familia es producto fibrado con $\mathcal{C}$.

Si existe moduli fino $\Rightarrow$ $\begin{array}{c} D \\ \downarrow \\ B \end{array} \rightsquigarrow \begin{array}{l} B \longrightarrow M \\ b \longmapsto D_b \end{array}$

$\begin{array}{c} B \times_M \mathcal{C} \\ \downarrow \\ B \end{array} \rightsquigarrow B \to M$

Esquema de Hilbert.

Recuerdo : $X \subseteq \mathbb{P}^r$ subesquema cerrado.
Polinomio de Hilbert $P_X(t) \in \mathbb{Q}[t]$
tal que $P_X(m) = h^0(X, \mathcal{O}_X(m)) \quad m \gg 0$.

Recuerdo : $X \xrightarrow{f} Y$ morfismo es plano si $\mathcal{O}_{X,x}$ es un $\mathcal{O}_{Y,f(x)}$-módulo plano.

Problema Moduli : $\mathrm{Hilb}_r^{p(t)} : \mathrm{Sch} \longrightarrow \mathrm{Sets}$

$B \mapsto \left\{ \begin{array}{l} \text{familias planas propias } \mathbb{P}^r \times B \supseteq X \to B \\ \text{con poli. de Hilbert } p(t) \end{array} \right\}$

basta con puntos cerrados $b \in B$, $X_b \subset \mathbb{P}^r_{k(b)}$

Teo : $\mathrm{Hilb}_r^{p(t)}$ es representable. Es decir existe esquema $H_r^{p(t)}$ t.q. $H_r^{p(t)}(\mathbb{C})$ parametriza subesquemas cerrados de $\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$ con pol. de Hilbert $p(t)$
$\exists$ familia universal $\mathbb{P}^r \times H_r^{p(t)} \supseteq \mathcal{G} \to H_r^{p(t)}$ plana.

$\rightarrow$ Sea $p(t) \in \mathbb{Q}[t]$, $X \subseteq \mathbb{P}^r$ cerrado con $P_X(n) = p(n)$.

$$0 \to \mathcal{J}_X(n) \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}^r}(n) \to \mathcal{O}_X(n) \to 0$$

$\exists\, n_0$ t.q. si $n \geq n_0 \Rightarrow h^i(\mathcal{J}_X(n)) = h^i(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^r}(n)) \to h^i(\mathcal{O}_X(n)) = 0 \quad \forall i > 0$.

$\therefore \quad H^0(\mathbb{P}^r, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^r}(n)) \xrightarrow{\varphi_n} H^0(X, \mathcal{O}_X(n))$ es sobre.

$\rightarrow \quad h^0(X, \mathcal{O}_X(n)) = p(n)$ y X está completamente determinado por $\ker \varphi_n = H^0(\mathbb{P}^r, \mathcal{J}_X(n))$.

Lema crucial : Se puede escoger $\boxed{n_0}$ tal que sólo depende de r y $p(t)$.

$n \geq n_0$

Sea $g(n) := \binom{n+r}{r} - p(n) = h^0(\mathcal{J}_X(n))$

Definimos

$$\{X \subseteq \mathbb{P}^r \text{ con poli. de Hilbert } p(t)\} \longrightarrow \mathbb{G}(\overset{\text{dimensión}}{g(n)}, H^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^r}(n)))$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} \text{subespacio de} \\ H^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^r}(n)) \text{ de dim } g(n) \end{array} \right\}$$

$$X \rightsquigarrow \underbrace{H^0(\mathbb{P}^r, \mathcal{J}_X(n))}_{\text{CARACTERIZA A } X} \subseteq H^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^r}(n))$$

Teo: la imagen es un cerrado, se le puede dar estructura de esquema natural proyectivo.

Ejlo $\mathbb{G}(m+1, \mathbb{C}^{n+1})$ espacio móduli fino par. subv. lineales en $\mathbb{P}^n$ de dim. m.

Ejlo $N = \binom{d+r}{r} - 1$ $X \subseteq \mathbb{P}^r$ es hipersup. de grado d sii $p_X(m) = \binom{r+m}{m} - \binom{r+m-d}{m-d}$

$X_0, \dots, X_r$ coord de $\mathbb{P}^r$ α_I coord de $\mathbb{P}^N$, donde I recorre multiíndices $(i_0, \dots, i_r)$ tq $\sum i_k = d$.

Sea $\mathcal{T} \subseteq \mathbb{P}^r \times \mathbb{P}^N$ la hipersup. def por $\sum_I \alpha_I X^I = 0$

$$\begin{array}{c} \mathbb{P}^r \times \mathbb{P}^N \supseteq \mathcal{T} \\ \downarrow \\ \mathbb{P}^N. \end{array}$$