Seminario Cohomológico : Charla I
Viernes 9-Agosto-2013

En principio queremos definir grupos de cohomología $H^i(X, \mathcal{F})$ para cualquier espacio topológico X y haz de grupos abelianos $\mathcal{F}$.

¿: Por un lado producir "invariantes" globales de X con coeficientes en $\mathcal{F}$ (Si $\mathcal{F}$ es un haz "canónico" para la categoría de los X, estos serán invariantes de la clase de isom. de X), por otro lado es una herramienta fundamental poderosa para trabajar con haces sobre un X fijo (Recordar que en un esquema los haces de ideales son los subesquemas, por ejemplo). Para esquemas sobre un cuerpo k fijo, los $H^i(X, \mathcal{F})$ ($\mathcal{F}$ = $\mathcal{O}_X$-módulo) serán espacios vectoriales y así "linearizan" problemas (a veces) no triviales sobre $\mathcal{F}$'s, X, etc...

(Ejemplo punto de vista 1) X = Var. proy. nosingular sobre $k = \bar{k}$
$\Rightarrow$ tenemos haces (localmente libres de rango $\binom{n}{r}$) $\Lambda^r \Omega^1_X$ donde Ω^1_X = haz de diferenciales (II Sect. 8), $0 \leq r \leq n$.

éo. de Serre 122) Entonces los $H^i(X, \Lambda^r \Omega^1_X)$ son espacios vectoriales de dimensión finita : las dimensiones son invariantes importantes de X. ($r=0$ significará $\Lambda^0 \Omega^1_X := \mathcal{O}_X$ = haz estructural.)

$\boxed{p_a(X) \text{ ,}\| \text{ género aritm.}}$

$\dim X = 1$: $H^0(X, \mathcal{O}_X) = k$ $H^1(X, \mathcal{O}_X) = k^g$, g = género de la curva X. (En general, con $\Lambda^n \Omega^1_X$ tendremos dualidad en cohomología con $\mathcal{O}_X$). $\boxed{\text{Dualidad de Serre}}$

$\boxed{(X,-) \;\|\; \text{será} \;\; X,-)}$

$\dim X = 2$: $H^0(X, \mathcal{O}_X) = k$, $H^1(X, \mathcal{O}_X) = k^{q(X)}$, $H^2(X, \mathcal{O}_X) = k^{p_g(X)}$
y $H^1(X, \Omega^1_X)$, $H^0(X, \Omega^1_X)$, $H^2(X, \Omega^1_X)$

(Si $k = \mathbb{C}$, Ω^1_X = 1-formas dif. holomorfas (como haz) y la descomposición de Hodge relaciona estos ~~[illegible]~~ grupos entre ellos y con los $H^i(X, \mathbb{Z})$; todo sobre la top. analítica (uso de GAGA también).)

$\boxed{\text{bién} \;\; \text{a}\,(X, \mathcal{O}_X) \;\; (X) \simeq H^1(X, \mathcal{O}_X^*) \;\; \mathcal{O}_X^*(U) = \mathcal{O}(U)^*}$

(Ejemplo punto de vista 2) ¡Aquí tenemos un sin fin!

Ej¹: Quizás la primera es exactificar secciones globales de un haz. Si $(X, \mathcal{O}_X)$ es un espacio anillado y $\mathcal{F}_i$ un haz de grupos abelianos (como siempre será, sólo agregamos estr. de $\mathcal{O}_X$-mod cuando corresponde...), entonces una sucesión exacta corta $0 \to \mathcal{F}_1 \to \mathcal{F}_2 \to \mathcal{F}_3 \to 0$ define naturalmente $0 \to H^0(X,\mathcal{F}_1) \to H^0(X,\mathcal{F}_2) \to H^0(X,\mathcal{F}_3)$ exacta pero típicamente $H^0(X,\mathcal{F}_2) \to H^0(X,\mathcal{F}_3)$ no es sobre. Con cohomología tendremos la sucesión exacta larga:

$$0 \to H^0(X,\mathcal{F}_1) \to H^0(X,\mathcal{F}_2) \to H^0(X,\mathcal{F}_3) \to H^1(X,\mathcal{F}_1) \to H^1(X,\mathcal{F}_2) \to H^1(X,\mathcal{F}_3) \to H^2(X,\mathcal{F}_1) \to \cdots$$

Así $H^1(X,\mathcal{F}_1) = 0$ implicará sobreyectividad.

Ej2: (Bertini y conexidad) Sea X una variedad proy. nonsingular sobre $k = \bar{k}$. Recordar que un divisor de Weil D es también Cartier y define un haz invertible $\mathcal{O}_X(D)$ único. (Más aún, recordar que $\mathrm{Div}(X)/\mathrm{PDiv}(X) \simeq \mathrm{CaDiv}(X)/\mathrm{PCaDiv}(X) \simeq \mathrm{Pic}(X)$ para una variedad nosingular.)

$$\therefore \quad H^0(X, \mathcal{O}_X(D)) = \{ f \in K(X)^* : \underbrace{\mathrm{div} f + D}_{\text{sistema lineal } |D|} \geq 0 \} \cup \{0\} \quad (*)$$

(y es un espacio vectorial de dim finita sobre k por el teorema general de Serre; Probl. de R-R es calcularla.)
(p. 122)

Por otro lado, dada una subvariedad de codim 1 Y en X, no necesar. irreducible (es todo el punto) el haz de ideales que define a Y es $\simeq \mathcal{O}_X(-Y)$ (abuso de notación). Luego la típica sucesión corta exacta es

$$0 \to \mathcal{O}_X(-Y) \to \mathcal{O}_X \to i_*\mathcal{O}_Y \to 0$$

donde $i : Y \hookrightarrow X$ es la inclusión. Así

#{componentes conexas de Y}?

$$0 \to \underbrace{H^0(X, \mathcal{O}_X(-Y))}_{(\text{mirar } (*))} = 0 \to \underbrace{H^0(X,\mathcal{O}_X)}_{= k} \to H^0(X, i_*\mathcal{O}_Y) = \overset{k^{\#}}{H^0(Y,\mathcal{O}_Y)} \to H^1(X,\mathcal{O}_X(-Y)) \to \cdots$$

y si $H^1(X, \mathcal{O}_X(-Y)) = 0 \Rightarrow$ tenemos que Y es conexa.

Lema (Enriques-Severi-Zariski "para nosotros"): X = normal proy. $\dim \geq 2$
7.8
44
y H hiperplano en $\mathbb{P}^n$ (donde $X \subseteq \mathbb{P}^n$)
$$\Rightarrow \quad H^1(X, \mathcal{O}_X(-m(H \cap X))) = 0 \quad \forall m \gg 0.$$

De vuelta en Bertini, sea $X \subseteq \mathbb{P}^n$ nosingular con $\dim X \geq 2$
$\Rightarrow$ para $H \in \mathcal{U} \subset \{\text{Hiperplanos de } \mathbb{P}^n\}$ con $\mathcal{U}$ abierto (Zariski) $\neq \emptyset$, tenemos que $H \cap X$ es nosingular (Teo. de Bertini ya visto, p. 179).
Si probamos que $H \cap X$ es conexa $\Rightarrow$ tendrá que ser irreducible
($p \in X_1 \cap X_2$ con $X = X_1 \cup X_2$ $X_1 \not\subset X_2$ $\Rightarrow \mathcal{O}_{X,p}$ no es dominio, pero en una var. nosingular $\mathcal{O}_{X,p}$ es regular $\Rightarrow$ dominio)

Pero ahora el truco es mirar el esquema $m(H \cap X)$ (con $X \not\subset H$).
$$0 \to \mathcal{O}_X(-m(H \cap X)) \to \mathcal{O}_X \to i_* \mathcal{O}_{m(H \cap X)} \to 0$$
$\underset{\text{cohom. y lema}}{\Rightarrow}$ $m(H \cap X)$ es conexo pero soporte es el mismo que $H \cap X$.

Así: $\forall H$ hiperplano $\not\supset X$ tenemos que $H \cap X$ es conexo si $\dim X \geq 2$.

Teo: $\exists\, \mathcal{U}$ abierto $\neq \emptyset \subset \{\text{hiperplanos de } \mathbb{P}^n\}$ tal que $H \cap X$ es una variedad nosingular ($\dim X \geq 2$).

$\longrightarrow$ Esto fue un ejemplo de una lista de teoremas de anulación (vanishing Theorem)

(G) X = espacio top. Noetheriano, $\mathcal{F}$ haz de grupos abelianos $\Rightarrow H^i(X, \mathcal{F}) = 0$ $\forall i > \dim X$. (Teorema de Grothendieck p. 208). (Así una secuencia corta exacta de haces da una secuencia larga en cohom. pero finita.)

(S) X = esquema Noetheriano $\Rightarrow$ X afín $\Leftrightarrow H^i(X, \mathcal{F}) = 0$ $\forall \mathcal{F}$ cuasi-coherente $\forall i > 0$
(Teorema de Serre)

Este teorema implicará que podemos calcular cohomología a través de cohomología Čech ($\check{H}^i$): Es como homología simplicial / singular
Čech / general

(K; K-V) Sobre $k=\mathbb{C}$ tenemos teoremas de Kodaira y generalización Kawamata-Viehweg cuyo uso es muy importante en, por ejemplo, geometría birracional.

... etc (mirar libro de R. Lazarsfeld "Positivity ..." I II)

→ Dualidad de Serre : (III, Sect 7) Este es un temazo general en geometría algebraica. Con respecto a cálculos, básicamente reduce el cálculo de cohomologías a la mitad usando el haz dualizador ω. Si X = var. proy. nosing $|_{k=\bar{k}}$ y $\mathcal{F}$ es un haz local. libre en $X \Rightarrow H^i(X,\mathcal{F}) \simeq H^{n-i}(X,\mathcal{F}^\vee \otimes \omega_X)^\vee$, donde $\omega_X = \mathcal{O}_X(K_X)$, K_X = clase del divisor canónico.

→ Teo. Groth-Hirzebruch-Riem-Roch : (p. 432) es la relación entre $\chi(X,\mathcal{F}) = \sum_{i=0}^{n}(-1)^i h^i(X,\mathcal{F})$ y teoría de intersección aplicada a $\mathcal{F}$ y ciertas clases de intersección "canónicas" de X.

Si X = var. proy. nosing $|_{k=\bar{k}}$ y $\mathcal{F}$ = haz loc. libre en X

$$\Rightarrow \underbrace{\chi(X,\mathcal{F})}_{\text{cohom.}} = \text{grado}(\underbrace{ch(\mathcal{F}) \cdot td(T_X)}_{\text{clases de intersección}})_{\dim X}$$

donde $T_X = \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\Omega^1_X, \mathcal{O}_X)$ = haz tangente.

P1 : ¿Cómo definir cohomología?

P2 : ¿Cómo calcular cohomología?

P3 : ¿Cuáles son los resultados fundamentales y como usarlos? (Sobre todo para variedades proyectivas $|_{k=\bar{k}}$ y haces cuasi-coherentes.)

→ Adicional : ¿Qué es una deformación en geom. algebraica y como se comporta la cohom. de un haz deformable?

Propuesta de Charlas

1. (Yo) Muy básicos en R-módulos y (co)homología: cadenas de complejos, sucesiones exactas, lema de la serpiente, ~~...~~ cohomología, sucesión exacta larga en cohom. Luego, categorías y functores y cat. abeliana (Groth.), homotopía.

2. (Yo) Definiendo cohomología: resoluciones e inyectivos, R^i_ (right derived functors) i.e. construcción de cohomología, suficientes inyectivos. Definición de cohomología H^i

2 3. (Robert) Anulaciones de Groth. y Serre: Los teoremas vanishing involucrando la dim del espacio (Grothendieck). y la estructura afín del espacio (Serre)

4 4. (Codarmin) Cohomología Čech: Definición de $\check{H}^i$ (y quizás su paralelo con homología simplicial) y propiedades, ejemplos (esto es calculable). Teorema $H^i = \check{H}^i$ (comparar con homología singular) (GAGA para top. analítica?) ($H^1(X, \mathcal{O}_X^*) = \mathrm{Pic}(X)$?)

5 5. (Edmund) Cohomología en $\mathbb{P}^n$: Cálculos en $\mathbb{P}^n$, finita generación de H^i (Serre) (cuya dem. mostré en el curso), caract. de amplio (Serre). Género aritmético

(6) 6. (Arié) Dualidad de Serre: Más bien plantearla y dar muchos corolarios,
opcional ejemplos, invariantes, residuos (~~...~~ $\Omega^1_X(\log D)$?).

7. Higher direct images: Sólo nuevas ideas y ejemplos, Leray y comparaciones

H.I (Codarmin)
8. Kodaira Vanishing / Kawamata Viehweg: aquí hay topología analítica
9 9. Flat: esto es deformaciones.
H10 10. Smooth: " " " suaves.

|| Hart 11/12 || 11. Zariski Main y Teoremas semi-cont.