Deformaciones sobre $k[t]/(t^2)$. Robert A. 1

<u>Teorema</u>: $k = \bar{k}$, $p(t) \in \mathbb{Q}[t]$. Entonces existe esquema proy. H que parametriza subesquemas cerrados de $\mathbb{P}^n_k$ con pol. de Hilbert $p(t)$ y una familia plana tal que $\mathbb{P}^n \times H \supseteq W \to H$ tal que la fibra de W sobre un pto cerrado $h \in H$ es un subesq. cerrado de $\mathbb{P}^n$ con pol. Hilbert p. Es universal.

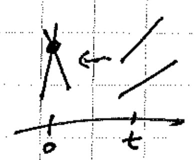
<u>Ej</u>)- $l_1, l_2 \subseteq \mathbb{P}^3$ rectas disjuntas $p(t) = P_{l_1 \cup l_2}(t) = 2t+2$.
El pol. de Hilbert de una cónica en $\mathbb{P}^3$ es $q(t) = 2t+1$.

Sea $C_t = \{x_1 = x_3 = 0\} \cup \{x_2 = x_3 - t x_0 = 0\}$ $\quad t \neq 0$

Sea $C \subseteq \mathbb{P}^3 \times \mathbb{A}^1$ def por $x_1 x_2 = x_1(x_3 - t x_0) = x_2 x_3 = x_3(x_3 - t x_0) = 0$

$$C \downarrow \mathbb{A}^1_t$$

$t = 0$: $x_1 x_2 = x_1 x_3 = x_2 x_3 = x_3^2 = 0$ se ve como $x_3 = x_1 x_2 = 0$.
unión la componente $x_1 = x_2 = x_3^2 = 0$



<u>Números duales</u>:

<u>Def</u>)- $D := \mathrm{Spec}(k[t]/(t^2))$.

<u>Ej</u>)- $h \in H \Rightarrow$ plano tangente de H en $h = \{\varphi : D \to H$ con $\varphi(\mathrm{spec}\, k) = h\}$ (suma de tangentes)

$$\varphi : D \to H \rightsquigarrow \mathbb{P}^n \times D \supseteq W' \to D \text{ plana}.$$

<u>Def</u>)- $X|_k$ esquema, $Y \subseteq X$ cerrado. Una deformación de Y ~~sobre~~ D en X: Subesquema cerrado $Y' \subseteq X' = X \times_k D$, plano sobre D tal que $Y' \times_D k = Y$.

Sea $X = \operatorname{Spec} B$, $Y = \operatorname{Spec}(B/I)$.

$B' = B[t]/t^2$, $\operatorname{Spec} B' = X \times_k D$, si $Y' = \operatorname{Spec} B'/I'$ tenemos el diagrama

$$\begin{tikzcd}
\operatorname{Spec}(B'/I' \otimes_A k) \arrow[r] \arrow[d] & \operatorname{Spec}(B'/I') \arrow[d] \\
\operatorname{Spec}(B' \otimes_A k) \arrow[r] \arrow[d] & \operatorname{Spec} B' \arrow[d] \\
\operatorname{Spec} k \arrow[r] & D
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
Y \arrow[r] \arrow[d] & Y' \arrow[d] \\
X \arrow[r] \arrow[d] & X \times D \arrow[d] \\
\circ \arrow[r] & D
\end{tikzcd}$$

se mueve

Queremos encontrar $I' \subseteq B'$ tal que con $B' \longrightarrow B'/tB' = B$ la imagen de I' sea I, y plano sobre D.

<u>Lema</u>: Un $k[t]/(t^2)$-modulo M es plano sobre ssi el morfismo $M \otimes_{k[t]/t^2} (t) \to M$ es inyectivo.

Queremos que $0 \to B/I \xrightarrow{t} B'/I' \longrightarrow B/I \to 0$ sea exacta. (mismo que plano).