

I. A -módulos, cohomología, categoría abeliana (23-Agosto)

II. Inyectivos, funtores derivados, cohomología de haces (30-Agosto)

Material tomado de:
Hartshorne III 1,2
HA notas de J. Tevelev

I. $A = \text{anillo conmutativo con } 1 \text{ (como el semestre anterior)}$

$\text{Mod}(A) = \text{categoría de } A\text{-módulos, morfismos } A\text{-lineales}$

Ej. $\text{Mod}(\mathbb{Z}) = \text{categoría de grupos abelianos} =: \text{Ab}$

$\text{Mod}(k) = \text{categoría de espacios vectoriales sobre } k =: \text{Vect}_k, k = \text{cuerpo}$

Def. (1) Un complejo de cocadenas de A -módulos es

$$C^\bullet : \dots \xrightarrow{d_{i-1}} C^i \xrightarrow{d_i} C^{i+1} \xrightarrow{d_{i+1}} \dots \quad d_{i+1} \circ d_i = 0 \quad \forall i$$

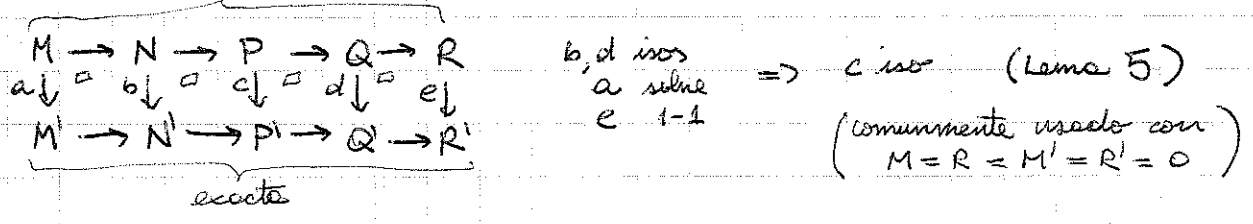
(2) la i -ésima cohomología de C^\bullet es $H^i(C^\bullet) := \ker d_{i+1} / \text{Im } d_i$.

(3) C^\bullet es una sucesión exacta si $\ker d_{i+1} = \text{Im } d_i \quad \forall i$.

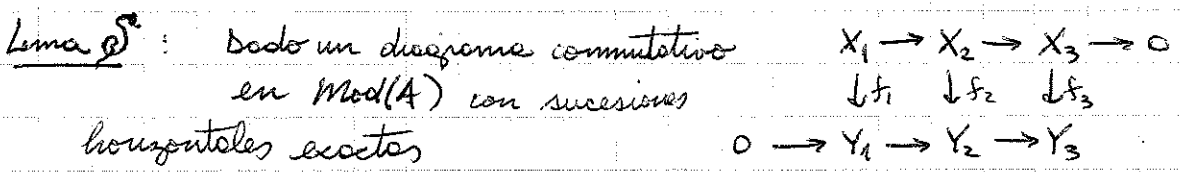
Una sucesión exacta corta es $0 \rightarrow M \rightarrow N \rightarrow P \rightarrow 0$.

(También hay complejos de cadenas y homología.)

→ Algunos lemas basados en "perseguir el diagrama":



Un lema muy útil para nosotros es el "Lema de la serpiente":

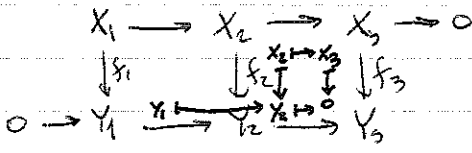


\Rightarrow tenemos sucesión exacta:

$$\ker f_1 \rightarrow \ker f_2 \rightarrow \ker f_3 \xrightarrow{\delta} \text{coker } f_1 \rightarrow \text{coker } f_2 \rightarrow \text{coker } f_3$$

Donde todos los morfismos son inducidos naturalmente de arriba excepto el morfismo conector δ .

Dem:



Explicamos solo S como función y A -lineal.

- $\ker f_3 \xrightarrow{S} \text{coker } f_1 = Y_1 / \text{Im } f_1$, $S(x_3) = [Y_1]$
- y notar que $S(x_3)$ depende solo por elementos en $\text{Im } f_2$
- Es obviamente morfismo de grupos abelianos
- Si $x_3 \in \ker f_3$ y $a \in A$, y $S(x_3) = [Y_1] \Rightarrow S(ax_3) = a[Y_1]$ (resqueando el diagrama) ■

Dados dos complejos de cocadenas C^\bullet, D^\bullet , un morfismo $C^\bullet \xrightarrow{f} D^\bullet$ es una colección commutativa de $C^i \xrightarrow{f_i} D^i$.
 Luego tenemos morfismo inducido entre cohomologías $H^i(C^\bullet) \rightarrow H^i(D^\bullet)$.

Lema (Sucesión larga exacta en cohomología)

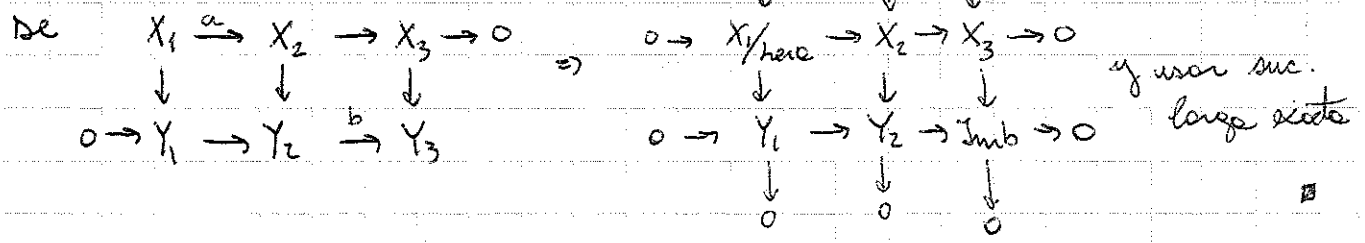
$0 \rightarrow B^\bullet \rightarrow C^\bullet \rightarrow D^\bullet \rightarrow 0$ exacta corta de complejos de cocadenas induce una sucesión exacta larga en cohomología:

$$\dots \xrightarrow{S} H^i(B^\bullet) \rightarrow H^i(C^\bullet) \rightarrow H^i(D^\bullet) \xrightarrow{S} H^{i+1}(B^\bullet) \rightarrow \dots$$

Dem: se usa el lema de la serpiente que en efecto es equivalente al lema suc. larga exacta en coh.

Sacar $B^i / \text{Im } f^{i-1} \rightarrow C^i / \text{Im } g^{i-1} \rightarrow D^i / \text{Im } h^{i-1} \rightarrow 0$ y usar lema de la S

$$0 \rightarrow \ker f_{i+1} \rightarrow \ker g_{i+1} \rightarrow \ker h_{i+1}$$



Definiremos cohomología de haces sobre un espacio topológico fijo X de la siguiente manera: dado \mathcal{F} haz en X , buscaremos ciertas "resoluciones" de \mathcal{F} dadas por objetos "inyectivos": $0 \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{I}^0 \xrightarrow{f^0} \mathcal{I}^1 \xrightarrow{f^1} \dots$ exacta. Luego tomaremos secciones globales de la cadena \mathcal{I}^\bullet :

$$0 \rightarrow \Gamma(X, \mathcal{I}^0) \rightarrow \Gamma(X, \mathcal{I}^1) \rightarrow \Gamma(X, \mathcal{I}^2) \rightarrow \dots$$

Esta cadena no es exacta en general, y de aquí tomaremos cohomología: $H^i(X, \mathcal{F}) := H^i(\Gamma(X, \mathcal{I}^\bullet))$.

Obs. Notar que $0 \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{I}^0 \rightarrow \ker f^0 \rightarrow 0 \Rightarrow H^0(X, \mathcal{F}) = \Gamma(X, \mathcal{F})$.

Pero podrien haber muchas resoluciones inyectivas para \mathcal{F} , ¿Porqué este bien define la $H^i(X, \mathcal{F})$? Esto es homotopía y va ligado con la definición de objetos inyectivos. (El problema será demostrar que todo \mathcal{F} tiene resolución inyectiva: esto se llama "la categoría tiene sucesores inyectivos".)

Defn (1) Dados dos morfismos $f, g: A^\bullet \rightarrow B^\bullet$, se dice que son homotópicos ($f \sim g$) si existe colección de morfismos $k^i: A^i \rightarrow B^{i-1}$ $\forall i$ tal que $f - g = dk + kd$ (los d son los morfismos de las cadenas.)

(2) A^\bullet, B^\bullet son homotópicamente equivalentes si $\exists f: A^\bullet \rightarrow B^\bullet$ y $g: B^\bullet \rightarrow A^\bullet$ tal que $f \circ g \sim 1_{B^\bullet}$ y $g \circ f \sim 1_{A^\bullet}$.

Obs. Si $f \sim g \Rightarrow$ los morfismos entre cohomología son los mismos. (muy fácil de ver de la definición.) Si $A^\bullet \sim B^\bullet \Rightarrow$ las cohomologías son isomorfas. IGUALES

Defn - Un $\mathcal{I} \in \text{Mod}(A)$ es inyectivo si $\forall A \xrightarrow{f} \mathcal{I}$ y $\forall A \xrightarrow{g} B$ siempre
contrava
nguen
 $\exists B \xrightarrow{h} \mathcal{I}$ tal que $h \circ g = f$. ($\Leftrightarrow \text{Hom}(-, \mathcal{I})$ exacto)
(no único) (cat. abel. (trivial))

Notar que entonces dos resoluciones inyectivas son así homotópicas y la functorialidad de $\Gamma(X, -)$ produce isomorfismos en cohomología... (veremos más)

Por ahora un punto que hay que clarificar es esto de intercambiarse entre haces de grupos abelianos (\mathcal{A} -módulos) y grupos abelianos (\mathcal{A} -módulos): este es el contenido de categoría abeliana.

Una categoría abeliana \mathcal{C} es una categoría que se comporta como $Ab = \text{cat. de los grupos abelianos}$; En efecto alguien termina probando \mathcal{C} es subcategoría de Ab . Esto quiere decir que teoremas generales que se demuestran en Ab son igualmente válidos en \mathcal{C} , y el punto es que en Ab se usan elementos (persiguiendo el diagrama). Nuestras categorías abelianas serán $Ab(X) = \text{haces de grupos abelianos sobre } X = \text{esp. top.}$; $\text{Mod}(X) = \text{haces de } \mathcal{A}\text{-módulos sobre un espacio empujado } (X, \mathcal{A})$; $\text{Qcoh}(X) = \text{haces cuasi-coherentes en un esquema } X$; $\text{Coh}(X) = \text{haces coherentes en un esquema } X$.

De esta forma, como podemos siempre localizar, lo de categoría abeliana abstracta no importa mucho. (ver. en Hart. p. 202)

$\rightarrow \Gamma: Ab(X) \rightarrow Ab$, $\Gamma(X, \mathcal{F}) = \text{secciones globales de } \mathcal{F}$ es un functor exacto izquierdo. En general, un functor covariante $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{B}$ entre dos cat. abelianas es aditivo si $\forall A, A' \in \mathcal{C}$ el morfismo inducido $\text{Hom}(A, A') \rightarrow \text{Hom}(FA, FA')$ es homomorfismo de gr. abelianos. F es functor exacto izquierdo si aditivo y $0 \rightarrow A \rightarrow A' \rightarrow A'' \rightarrow 0 \Rightarrow 0 \rightarrow FA \rightarrow FA' \rightarrow FA'' \rightarrow 0$. (exacto derecho $\Rightarrow 0$ a la derecha; exacto \Rightarrow ambos lados.)

Ej: $B \rightarrow \text{Hom}(A, B)$; $\text{Hom}(-, A)$
 \uparrow isom. \uparrow isom.
covar. isg. contrav. isg.

Def: Sea \mathcal{C} categoría abeliana con suficientes inyectivos ($\forall A \in \mathcal{C}, 0 \rightarrow A \rightarrow I^0$).
Sea $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{B}$ un functor covariante exacto izquierdo.
Un functor derivado derecho de F es: Dado $A \in \mathcal{C}$, elegir resolución inyectiva I^\bullet de A y definir

$$R^i F(A) := H^i(F(I^\bullet))$$