I. A-modulos, cohomología, categoría abeliana (23-Agosto)
II. ~~Inyectivos~~, functores derivados, cohomología de haces (30-Agosto)

material tomado de:
Hartshorne III 1,2
HA notas de J. Tevelev

I. $A$ = anillo conmutativo con 1 (como el semestre anterior)
$Mod(A)$ = Categoría de A-módulos, morfismos A-lineales

Ej: $Mod(\mathbb{Z})$ = Categoría de grupos abelianos $=: \mathcal{Ab}$
$Mod(k)$ = Categoría de espacios vectoriales sobre $k =: Vect_k$, $k$ = cuerpo

Def: (1) Un complejo de cocadenas de A-módulos es
$$C^\circ : \quad \cdots \xrightarrow{d_{i-1}} C^i \xrightarrow{d_i} C^{i+1} \xrightarrow{d_{i+1}} \cdots \qquad d_{i+1}\circ d_i = 0 \quad \forall i$$
(2) La $i$-ésima cohomología de $C^\circ$ es $H^i(C^\circ) := \ker d_{i+1} / \operatorname{Im} d_i$.
(3) $C^\circ$ es una sucesión exacta si $\ker d_{i+1} = \operatorname{Im} d_i \ \forall i$.
Una sucesión exacta corta es $0 \to M \to N \to P \to 0$.
(También hay complejos de cadenas y homología.)

→ Algunos lemas basados en "perseguir el diagrama":

$$\begin{array}{ccccccccc} & & & & \text{exacta} & & & & \\ M & \to & N & \to & P & \to & Q & \to & R \\ {\scriptstyle a}\downarrow & & {\scriptstyle b}\downarrow & & {\scriptstyle c}\downarrow & & {\scriptstyle d}\downarrow & & {\scriptstyle e}\downarrow \\ M' & \to & N' & \to & P' & \to & Q' & \to & R' \\ & & & & \text{exacta} & & & & \end{array}$$

$b, d$ isos, $a$ sobre, $e$ 1-1 $\Rightarrow$ $c$ iso (Lema 5)
(comunmente usado con $M = R = M' = R' = 0$)

Un lema muy útil para nosotros es el "Lema de la serpiente":

Lema S: Dado un diagrama conmutativo en $Mod(A)$ con sucesiones horizontales exactas

$$\begin{array}{ccccccc} & & X_1 & \to & X_2 & \to & X_3 \to 0 \\ & & \downarrow f_1 & & \downarrow f_2 & & \downarrow f_3 \\ 0 & \to & Y_1 & \to & Y_2 & \to & Y_3 \end{array}$$

$\Rightarrow$ tenemos sucesión exacta
$$\ker f_1 \to \ker f_2 \to \ker f_3 \xrightarrow{\delta} \operatorname{coker} f_1 \to \operatorname{coker} f_2 \to \operatorname{coker} f_3$$

Donde todos los morfismos son inducidos naturalmente de arriba excepto el morfismo conector $\delta$.

Dem:

$$\begin{tikzcd} & X_1 \arrow[r] \arrow[d, "f_1"] & X_2 \arrow[r] \arrow[d, "f_2"] & X_3 \arrow[r] \arrow[d, "f_3"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & Y_1 \arrow[r] & Y_2 \arrow[r] & Y_3 & \end{tikzcd}$$

$x_2 \mapsto x_3$, $y_1 \mapsto y_2$, $y_2 \mapsto 0$

Explicamos sólo $\delta$ como función y $A$-lineal.

→ $\ker f_3 \xrightarrow{\delta} \operatorname{coker} f_1 = Y_1/\operatorname{Im} f_1$, $\quad \delta(x_3) = [y_1]$
y notar que $\delta(x_3)$ difiere solo por elementos en $\operatorname{Im} f_1$.
→ Es obviamente morfismo de grupos abelianos.
→ Si $x_3 \in \ker f_3$ y $a \in A$, y $\delta(x_3) = [y_1] \Rightarrow \delta(a x_3) = a[y_1]$
(siguiendo el diagrama) ∎

Dados dos complejos de cocadenas $C^\circ, D^\circ$, un morfismo $C^\circ \xrightarrow{f} D^\circ$ es una colección conmutativa de $C^i \xrightarrow{f_i} D^i$. Luego tenemos morfismo inducido entre cohomologías $H^i(C^\circ) \longrightarrow H^i(D^\circ)$.

<u>Lema</u> (Sucesión larga exacta en cohomología)
$0 \to B^\circ \to C^\circ \to D^\circ \to 0$ exacta corta de complejos de cocadenas induce una sucesión exacta larga en cohomología:

$$\cdots \xrightarrow{\delta} H^i(B^\circ) \to H^i(C^\circ) \to H^i(D^\circ) \xrightarrow{\delta} H^{i+1}(B^\circ) \to \cdots$$

<u>Dem</u>: Se usa el lema de la serpiente que en efecto es equivalente al lema suc. larga exacta en coh.

Sacar

$$\begin{tikzcd} & B^i/\operatorname{Im} f^{i-1} \arrow[r] \arrow[d, "f_i"] & C^i/\operatorname{Im} g^{i-1} \arrow[r] \arrow[d, "g^i"] & D^i/\operatorname{Im} h^{i-1} \arrow[r] \arrow[d, "h^i"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & \ker f_{i+1} \arrow[r] & \ker g^{i+1} \arrow[r] & \ker h^{i+1} & \end{tikzcd}$$

y usar lema de la S

De

$$\begin{tikzcd} & X_1 \arrow[r, "a"] \arrow[d] & X_2 \arrow[r] \arrow[d] & X_3 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\ 0 \arrow[r] & Y_1 \arrow[r] & Y_2 \arrow[r, "b"] & Y_3 & \end{tikzcd}$$

$\Rightarrow$

$$\begin{tikzcd} & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\ 0 \arrow[r] & X_1/\ker a \arrow[r] \arrow[d] & X_2 \arrow[r] \arrow[d] & X_3 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\ 0 \arrow[r] & Y_1 \arrow[r] \arrow[d] & Y_2 \arrow[r] \arrow[d] & \operatorname{Im} b \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\ & 0 & 0 & 0 & \end{tikzcd}$$

y usar suc. larga exacta ∎

Definiremos cohomología de haces sobre un espacio topológico fijo $X$ de la siguiente manera: Dado $\mathcal{F}$ haz en $X$, buscaremos ciertas "resoluciones" de $\mathcal{F}$ dadas por objetos "inyectivos": $0 \to \mathcal{F} \to I^0 \xrightarrow{f^0} I^1 \xrightarrow{f^1} \cdots$ exacta. Luego tomaremos secciones globales de la cadena $I^\bullet$:

$$0 \to \Gamma(X, I^0) \to \Gamma(X, I^1) \to \Gamma(X, I^2) \to \cdots$$

Esta cadena no es exacta en general, y de aquí tomaremos cohomología: $H^i(X,\mathcal{F}) := H^i(\Gamma(X, I^\bullet))$.

Obs/- Notar que $0 \to \mathcal{F} \to I^0 \to \ker f^1 \to 0 \Rightarrow H^0(X,\mathcal{F}) = \Gamma(X,\mathcal{F})$.

Pero podrían haber muchas resoluciones inyectivas para $\mathcal{F}$, ¿Porqué está bien definida la $H^i(X,\mathcal{F})$? Esto es homotopía y va ligado con la definición de objetos inyectivos. (El problema será demostrar que todo $\mathcal{F}$ tiene resolución inyectiva: esto se llama "la categoría tiene suficientes inyectivos".)

Def/- (1) Dados dos morfismos $f,g : A^\bullet \to B^\bullet$, se dice que son homotópicos ($f \sim g$) si existe colección de morfismos $k^i : A^i \to B^{i-1}$ $\forall i$ tal que $f - g = dk + kd$ (los $d$ son los morfismos de las cadenas.)

(2) $A^\bullet, B^\bullet$ son homotópicamente equivalentes si $\exists f : A^\bullet \to B^\bullet$ y $g : B^\bullet \to A^\bullet$ tal que $f \circ g \sim 1\!\!1_{B^\bullet}$ y $g \circ f \sim 1\!\!1_{A^\bullet}$.

IGUALES

Obs/- Si $f \sim g \Rightarrow$ los morfismos entre cohomología son los mismos. (muy fácil de ver de la definición.) Si $A^\bullet \sim B^\bullet \Rightarrow$ las cohomologías son isomorfas.

siempre contravariante izquierda

Def/- Un $I \in \mathrm{Mod}(A)$ es inyectivo si $\forall A \xrightarrow{f} I$ y $\forall A \overset{g}{\hookrightarrow} B$ $\exists B \xrightarrow{h} I$ tal que $h \circ g = f$. ($\underset{\text{cat. abel (trivial)}}{\Leftrightarrow}$ $\mathrm{Hom}(-, I)$ exacto)
(no único)

Notar que entonces dos resoluciones inyectivas son así homotópicas y la functorialidad de $\Gamma(X, -)$ produce isomorfismos en cohomología ...
(ya veremos más

Por ahora un punto que hay que clarificar es esto de intercambiarse entre haces de grupos abelianos (o $\mathcal{O}_X$-módulos) y grupos abelianos (o A-módulos): este es el contenido de categoría abeliana.

Una categoría abeliana $\mathcal{C}$ es una categoría que se comporta como $\mathfrak{Ab}$ = cat. de los grupos abelianos; En efecto alguien termina probando $\mathcal{C}$ es subcategoría de $\mathfrak{Ab}$. Esto quiere decir que teoremas generales que se demuestran en $\mathfrak{Ab}$ son igualmente válidos en $\mathcal{C}$, y el punto es que en $\mathfrak{Ab}$ se usaron elementos (persiguiendo el diagrama). Nuestras categorías abelianas serán $\mathfrak{Ab}(X)$ = haces de grupos abelianos sobre $X$ = esp. top.; $\mathfrak{Mod}(X)$ = haces de $\mathcal{O}_X$-módulos sobre un espacio anillado $(X,\mathcal{O}_X)$; $\mathfrak{Qco}(X)$ = haces cuasi-coherentes en un esquema $X$; $\mathfrak{Coh}(X)$ = haces coherentes en un esquema $X$.

De esta forma, como podemos siempre localizar, lo de categoría abeliana abstracta no importa mucho. (Def. en Hart. p. 202)

→ $\Gamma : \mathfrak{Ab}(X) \to \mathfrak{Ab}$, $\Gamma(X,\mathcal{F})$ = secciones globales de $\mathcal{F}$ es un functor exacto izquierdo. En general, un functor covariante $F : \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ entre dos cat. abelianas es aditivo si $\forall A, A' \in \mathfrak{A}$ el morfismo inducido $\mathrm{Hom}(A,A') \to \mathrm{Hom}(FA,FA')$ es homomorfismo de gr. abelianos.

$F$ es functor exacto izquierdo si aditivo y $\underbrace{0\to A\to A'\to A''\to 0}_{\text{exacta}} \Rightarrow \underbrace{0\to FA\to FA'\to FA''}_{\text{exacta}}$.

(exacto derecho ⇒ 0 a la derecha; exacto ⇒ ambos casos.)

(para contravariante lo análogo.) Ej.- $\underbrace{B \to \mathrm{Hom}(\overset{\text{fijo}}{A}, B)}_{\text{covar. izq.}}$ ; $\underbrace{\mathrm{Hom}(-, \overset{\text{fijo}}{A})}_{\text{contrav. izq.}}$

Def.- Sea $\mathfrak{A}$ categoría abeliana con suficientes inyectivos ($\forall A \in \mathfrak{A}, \exists\, 0 \to A \to I$). Sea $F : \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ un functor covariante exacto izquierdo. Un functor derivado derecho de $F$ es: Dado $A \in \mathfrak{A}$, elegir resolución inyectiva $I^{\cdot}$ de $A$ y definir

$$R^i F(A) := H^i(F(I^{\cdot}))$$