Deformaciones sobre Spec $k[t]/(t^2)$

Dado un esquema X y un subesq. cerrado $Y \subseteq X$, queremos un subesq. cerrado $Y' \subseteq X \times \operatorname{Spec} k[t]/t^2$, plano sobre $\operatorname{Spec} k[t]/t^2$ tq. $Y' \times_D k = Y$.

<u>Caso afín</u>: $X = \operatorname{Spec} B$, $I \subseteq B$ ideal. Queremos $I' \subseteq B[t]/t^2$ tq.

$$\underbrace{I' \otimes \operatorname{Spec}\left[k[t]/(t)^2 / (t) \right]}_{\text{Imagen de } I' \text{ en } B'/tB' = B} = I.$$

Sea $D = \operatorname{Spec} \frac{k[t]}{t^2}$

$R = k[t]/t^2$

<u>Lemma</u>: Un R-módulo M es plano ssi

$$M \otimes_k (t) \longrightarrow M$$

es inyectivo.

En particular, B'/I' es plano sobre R ssi $B'/I' \otimes_{\left(k[t]/t^2\right)/(t)} (t) \longrightarrow B'/I'$ es 1-1. Esto es equiv. a que la suc.

$$0 \longrightarrow B/I \xrightarrow{t} B'/I' \longrightarrow B/I \longrightarrow 0$$

sea exacta.

Si I' es un ideal como arriba, tenemos el diagrama

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & 0 & & 0 & & 0 & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & I & \longrightarrow & I' & \longrightarrow & I & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & B & \xrightarrow{t} & B' & \longrightarrow & B & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & B/I & \longrightarrow & B'/I' & \longrightarrow & B/I & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & 0 & & 0 & & 0 & &
\end{array}$$

y si la fila inferior es exacta, también lo es la fila sup.

Prop: Dar $I' \subseteq B'$ como arriba tq. B'/I' es plano sobre R es equiv. a dar un elemento de $\mathrm{Hom}_B(I, B/I)$. En particular, 0 corresponde a la deformación trivial dada por $I \oplus tI \subseteq B'$.

Dem: Como B-módulo, $B' = B \oplus tB$ (pues tenemos una sección $B \to B'$ donde $b \mapsto b + 0 \cdot t$.

Sea $x \in I$, y $x + ty \in I'$ sobre x. Dos levantamientos difieren por un elemento zt con $z \in I$ (véase el diagrama). Luego $\bar{y} \in B/I$ está únicamente determinado. El mapeo $x \mapsto \bar{y}$ es un homomorfismo de B-módulos. Vice versa, si $\varphi \in \mathrm{Hom}_B(I, B/I)$, sea

$$I' = \{x + ty : x \in I,\ \varphi(x) - y \in I\}.$$

I' es ideal, y

$$0 \to I \xrightarrow{t} I' \to I \to 0 \quad \text{es ex.}$$

snake lemma $\Rightarrow$ ex. de la fila inf. del diagrama $\Rightarrow$ B'/I' es plano $/R$. $\square$

Ahora globalmente: $Y \subseteq X$ subesq. cerrado de un esq. X.

Definimos el <u>haz normal</u> de Y en X como

$$\mathcal{N}_{Y/X} := \mathcal{H}om_Y(\mathcal{I}/\mathcal{I}^2, \mathcal{O}_Y),$$

donde $\mathcal{I}$ es el haz de ideales de Y en X. Se llama haz normal porque cabe en una suc. exacta

$$0 \to T_Y \to T_X|_Y \to \mathcal{N}_{Y/X} \to 0,$$

donde T_Y y T_X son los fibrados tangentes de Y y X, resp.

Como todos los homomorfismos $\mathcal{I} \to \mathcal{O}_Y$ factorizan por $\mathcal{I}/\mathcal{I}^2$, vemos que $\mathcal{H}om_X(\mathcal{I},\mathcal{O}_Y) = \mathcal{H}om_Y(\mathcal{I}/\mathcal{I}^2,\mathcal{O}_Y) = \mathcal{N}_{Y/X}$.

Teo: X esq. $/k=\bar{k}$, $Y \subseteq X$ subesq. cerrado de X. Entonces las deformaciones de Y sobre $\operatorname{Spec}\frac{k[t]}{t^2}$ en X están en correspondencia 1-1 con los elementos de $H^0(Y,\mathcal{N}_{Y/X})$, y 0 corresponde a la def. trivial.

Este H^0 aparece porque $\operatorname{Hom}_X(\mathcal{I},\mathcal{O}_Y) = H^0(X,\mathcal{H}om_X(\mathcal{I},\mathcal{O}_Y)) = H^0(Y,\mathcal{N}_{Y/X})$.

Corolario: $Y \subseteq \mathbb{P}^n_k$ cerrado, entonces el plano tangente del esq. de Hilbert en $[Y]$ es isomorfo a $H^0(Y,\mathcal{N}_{Y/\mathbb{P}^n})$.

Ej: Sea $C \subseteq \mathbb{P}^2$ una cónica. Entonces $\mathcal{I}_C = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(-2)$ y

$$0 \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(-2) \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2} \to \mathcal{O}_C \to 0 \quad \text{ex.}$$

Como $H^1(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(-2)) = 0$,

$$0 \to \underbrace{\mathcal{I}\otimes\mathcal{I}}_{=\,\mathcal{I}^2} \to \mathcal{I} \to \mathcal{I}\otimes\mathcal{O}_C \to 0 \quad \text{ex.}$$

$\Rightarrow \mathcal{I}/\mathcal{I}^2 = \mathcal{I}\otimes\mathcal{O}_C = \mathcal{I}|_C = \mathcal{O}_C(-2)$.

$\Rightarrow \mathcal{N}_{Y/\mathbb{P}^2} = \mathcal{O}_C(-2)^\vee = \mathcal{O}_C(2)$.

Tenemos un iso. $\mathbb{P}^1 \xrightarrow{i} C \subseteq \mathbb{P}^2$ y $i^*\mathcal{O}_C(2) = i^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(2) = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(4)$.

Por lo tanto $h^0(\mathcal{N}_{Y/\mathbb{P}^2}) = h^0(\mathbb{P}^1,\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(4)) = \binom{4+1}{1} = 5$.

Luego, el esq. de Hilbert de cónicas en $\mathbb{P}^2$ es 5-dimensional (esto ya lo sabíamos)

Ahora sea X/k esq., $\mathcal{L} \in \operatorname{Pic} X$.

Teo: Las clases de isomorfismo de haces invertibles $\mathcal{L}'$ en $X' = X \times D$ tq. $\mathcal{L}' \otimes \mathcal{O}_X \simeq \mathcal{L}$ está en correspondencia 1-1 con elementos del grupo $H^1(X, \mathcal{O}_X)$.

Idea de dem: Uno obtiene una suc. exacta

$$0 \to H^1(X, \mathcal{O}_X) \to H^1(X', \mathcal{O}_{X'}^{\times}) \to H^1(X, \mathcal{O}_X^{\times}) \to 0$$

que splitea, donde el último morfismo corresponde a restricción. Sobre $\mathcal{L} \in H^1(X, \mathcal{O}_X^{\times})$ tenemos una clase lateral que identificamos con el ker. $\square$

Teo: X/k esq, $\mathcal{F} \in \operatorname{Coh}(X)$. Las clases de isomorfismo de $\mathcal{F}'$ en $X \times D$ QC tq. es plano sobre D y $\mathcal{F}' \otimes_D k \to \mathcal{F}$ es isomorfismo están en biyección con los elementos de $\operatorname{Ext}^1_X(\mathcal{F}, \mathcal{F})$.