⑤

**Teo**: Sea $\mathfrak{A}$ = cat. abeliana con suficientes inyectivos, $\mathcal{B}$ = cat. abel. y $F: \mathfrak{A} \to \mathcal{B}$ functor covariante exacto izquierdo

$\Rightarrow$ (a) $\forall i \geq 0$, $R^iF$ es aditivo de $\mathfrak{A} \to \mathcal{B}$ e indep. de las resol. inyectivas elegidas (salvo isom.).

(b) $F \cong R^0F$

(c) $0 \to A' \to A \to A'' \to 0$ corta exacta $\Rightarrow \exists\, \delta^i : R^iF(A'') \to R^{i+1}F(A')$ $\forall i \geq 0$ y la sucesión exacta larga en "cohomología".

(d) Dado $\begin{matrix} 0 \to A' \to A \to A'' \to 0 \\ \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \\ 0 \to B' \to B \to B'' \to 0 \end{matrix}$ $\Rightarrow$ diagr. conm. en sucesión larga exacta.

(e) $\forall I \in \mathfrak{A}$ inyectivo y $\forall i > 0$, $R^iF(I) = 0$.

$\to$ Resoluciones libres, proyectivas e inyectivas.

**Lema**: Todo A-módulo M admite una resolución libre, esto es una sucesión exacta $\cdots \to F_2 \xrightarrow{f_2} F_1 \xrightarrow{f_1} F_0 \xrightarrow{f_0} M \to 0$ con $F_i$ A-módulo libre $\forall i$. Si A es noeth. y M es f.g $\Rightarrow$ se pueden elegir $F_i$ f.g.

**dem**: Elegir generadores $\{g_i\}_{i\in S}$ de M (pueden ser todos los elementos de M por ejemplo) $\Rightarrow f_0 : F_0 := \bigoplus_{i\in S} A \to M \to 0$, $1_i \mapsto g_i$. Luego iterar constr. con $f_1 : F_1 \to \ker(f_0) \to 0$, etc. Si A noeth. y M f.g. $\underset{(\text{general})}{\Rightarrow}$ $\ker f_0$ f.g etc etc ∎

En categorías abelianas generales no es claro qué es un "elemento libre".

**Def**: Un objeto P es proyectivo si $\forall\, C \xrightarrow{p} B \to 0$ y $\forall\, P \xrightarrow{f} B$ $\underset{(\text{no único})}{\exists}$ $P \xrightarrow{g} C$ tal que $p \circ g = f$. ($\underset{\substack{\text{cat. abel.} \\ (\text{trivial})}}{\Leftrightarrow}$ $\mathrm{Hom}(P, -)$ es exacto)

Mostrar las 1800 equivalencias de proyectivo para A-módulos de la tarea de Fulton, una de ellas es

**Lema**: P A-módulo es proyectivo $\Leftrightarrow \exists$ A-módulo P' tal que $P \oplus P'$ es un A-módulo libre.

(Tomar $\bigoplus A \xrightarrow{g} P \to 0$ y $P \xrightarrow{1} P \Rightarrow P \hookrightarrow \bigoplus A$ y $\bigoplus A = P \oplus \ker g$. Por otro lado, $\begin{tikzcd} C \arrow[r] & B \arrow[r] & 0 \\ & P \arrow[u] \arrow[ul, dashed] & \underbrace{P\oplus P' = \bigoplus A}_{\text{proy}} \arrow[l] \arrow[ull, bend left] \end{tikzcd}$.)

Así A-módulos libres son proyectivos (pero eso ya era trivial!)

(Tarea Alg. Abstr. 1 de Fulton)

→ $R$ = anillo conmutativo con 1, $P$ = $R$-módulo finitamente generado.
Entonces son equivalentes:

(i) $\exists\, Q$ $R$-módulo fin. gen. tal que $P \oplus Q \simeq R^n$ algún $n$
(ii) Para todo $M \xrightarrow{\pi} P \to 0$, $\exists\, \varphi : P \to M$ con $\pi \circ \varphi = 1\!\!1_P$
(iii) Como en (ii) pero $M$ fin. gen.
(iv) Como en (ii) pero $M = R^n$, cualquier $n$.
(v) Como en (ii) pero $M = R^n$, para un $n$ y un $\pi$ sobreyectivo.
(vi) $\forall\, M \xrightarrow{\pi} P$, existe $M \xrightarrow{\psi} \ker(\pi)$ tal que $\psi(x) = x$, $x \in \ker(\pi)$
(vii) Como en (vi) pero para un $M = R^n$ y un $\pi$.
(viii) $\forall\, M \xrightarrow{\pi} N \to 0$ y $\forall\, P \xrightarrow{\psi} N$, $\exists\, \varphi : P \to M$ con $\pi \circ \varphi = \psi$.
(ix) Como en (viii) pero con $M$ fin. generado
(x) Como en (viii) pero $M$ fin generado y libre
(xi) $\forall$ sucesión corta exacta $0 \to A \to B \to C \to 0$
$\Rightarrow$ $0 \to \mathrm{Hom}(P,A) \to \mathrm{Hom}(P,B) \to \mathrm{Hom}(P,C) \to 0$ es exacta.

→ Si $R$ es un dominio de ideales principales. Entonces un $P$ $R$-mód. fin generado proyectivo es libre.

→ Si $R = \mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ $\Rightarrow$ $I = (3, 2+\sqrt{-5})$ es proyectivo (usar vii) pero no es libre.

En efecto:

Un módulo fin. gen. sobre $R$ = conm. Noeth. es <u>loc. libre</u> $\Leftrightarrow$ es <u>proyectivo</u>.

Ej: $\mathbb{Q}$ no es proyectivo como $\mathbb{Z}$-módulo.

**Def:** Una categ. abeliana tiene suficientes proyectivos si $\forall$ objeto $M$, existe $P$ proyectivo y $P \to M \to 0$.

Así $A$-módulos tienen suficientes proyectivos. Si una cat. abeliana tiene suficientes proyectivos $\Rightarrow$ tiene resoluciones proyectivas para todo objeto $M$: $\cdots \to P_2 \xrightarrow{f_2} P_1 \xrightarrow{f_1} P_0 \xrightarrow{f_0} M \to 0$.

**Obs:** Pero la categ. abeliana $\mathrm{Qcol}(\mathbb{P}^1_k)$ no tiene suf. proyectivos. Uno puede crear una situación contradictoria con $P \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}} \to 0$, $P$ proyectivo

(Primero se prueba que $H^0(P(\ell)) \twoheadrightarrow H^0(\mathcal{O}(\ell))$ $\ell >> 0$. Luego si fuese proy $\Rightarrow$
$$\begin{array}{ccccc} P & \to & \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1} & \to & 0 \\ \exists\downarrow & & \downarrow & & \\ \mathcal{O}(-\ell-1) & \to & k(P) & \to & 0 \end{array}$$
y $\otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(\ell)$ + secciones globales $\Rightarrow\Leftarrow$)

**Def:** Una categoría abeliana tiene suficientes inyectivos si $\forall$ objeto $M$, existe $I$ inyectivo y $0 \to M \to I$. Luego tal categoría tendrá resol. inyectivas para todos: $0 \to M \xrightarrow{f_0} I_0 \xrightarrow{f_1} I_1 \xrightarrow{f_2} \cdots$

¿Qué es ser inyectivo en ejemplos? ¿tiene $\mathrm{Mod}(A)$ suf. iny? ¿$\mathcal{A}b$?

**Lema:** Un $A$-módulo inyectivo $I$ es divisible, i.e. $\forall x \in I$ y todo $d \in A$ no divisor de cero, $\exists y \in I$ tal que $x = dy$.

**dem:**
$$\begin{array}{ccccc} & & 1 \mapsto x & & I \\ & & & \nearrow & \uparrow f \\ 0 & \to & A & \xrightarrow{\cdot d} & A \end{array} \Rightarrow f(d) = x = d\cdot f(1) \quad \blacksquare$$

**Lema:** Un grupo abeliano $I$ es inyectivo ($\mathbb{Z}$-mód) $\Leftrightarrow$ $I$ es divisible. (Grupos finitos no son. $\mathbb{Z}$ no es)

**dem:** Considerar $0 \to A \to B$ y $A \xrightarrow{f} I$. Usar lema de Zorn para $(M, g)$, $A \subset M \subset B$ y $g: M \to I$ homomorfismo extendiendo $f$. Una cadena ascendente tiene cota superior (tomando la unión) $\Rightarrow$ Existe elemento maximal $(M, g)$ y si $M = B \Rightarrow$ listos. Sino, sea $x \in B \setminus M$.

(reducir a escribir)

Sea $M = A + \mathbb{Z}x$. Si la suma es directa $\Rightarrow$ listos ($f(x)$ es lo que sea) Sino sea $d =$ mínimo entero $>0$ tal que $dx \in A$. YA que $I$ es divisible, $\exists u \in I$ tal que $f(dx) = du$
$\Rightarrow$ $f(a+kx) := f(a) + ku$ es un morfismo bien definido.

Si $a+kx = a'+k'x \Rightarrow a-a' = (k'-k)x \Rightarrow k'-k = md$
$\Rightarrow f(a)+ku = f(a'+mdx)+ku = f(a')+mu+ku = f(a')+k'u$
y así $\rightarrow\leftarrow$ $\Rightarrow M = B$ ∎

$\rightarrow$ suficientes inyectivos.

Lema: Ab tiene suficientes inyectivos.

dem/ $M =$ grupo abeliano; sea $M^\vee = \mathrm{Hom}(M, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$. Entonces,
$\eta : M \longrightarrow (M^\vee)^\vee$, $m \mapsto [f \to f(m)]$, es inyectiva.
$\rightarrow$ Sea $m \neq 0 \in M \Rightarrow$ Existe $f : \langle m \rangle \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ tal que $f(m) \neq 0$.
(ya que la definición depende del orden de $m$ en $M$ y $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ tiene elementos de todos los ordenes.) Luego $f$ se extiende a un morfismo $f : M \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ (inyectividad de $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$). Luego $\eta$ es 1-1.
$\rightarrow$ Considerar $\bigoplus_{i\in I} \mathbb{Z} = F \to M^\vee \to 0 \Rightarrow 0 \to (M^\vee)^\vee \to F^\vee = \prod_{i\in I}(\mathbb{Q}/\mathbb{Z})$
y este grupo es divisible $\Rightarrow$ inyectivo
$\therefore$ $0 \to M \xrightarrow{\eta} (M^\vee)^\vee \hookrightarrow \prod_{i\in I}(\mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ ∎

Lema: $\mathrm{Mod}(A)$ tiene suficientes inyectivos.
dem/ Mirar refer. en Hartshorne / notas Serre §11 ∎

Lema: $(X, \mathcal{O}_X)$ espacio anillado $\Rightarrow$ $\mathrm{Mod}(X) =$ categoría de $\mathcal{O}_X$-mod. tiene suficientes inyectivos
dem/ Demostr. en Hart. p. 207. Dado $\mathcal{F} \in \mathrm{Mod}(X)$, $\mathcal{F}_x \hookrightarrow I_x$ para $x \in X$ y $I_x$ inyectivos $\Rightarrow \exists\ \mathcal{F} \hookrightarrow \mathcal{G} = \prod_{x\in X} j_*(I_x)$, $j : x \hookrightarrow X$
y $\mathcal{G}$ es inyectivo. Detalles en p. 207 ∎ imagen directa.

Lema: $X =$ esp. top. $\Rightarrow$ $\mathrm{Ab}(X)$ tiene suf. inyectivos
dem: tomar $\mathcal{O}_X := \underline{\mathbb{Z}}$ el haz constante a valores en $\mathbb{Z}$ $\therefore$ $\mathrm{Ab}(X) = \mathrm{Mod}(X)$

Con suficientes inyectivos entonces se define cohomología

Def: $X$ = esp. topológico. Sea $\Gamma(X,-) : Ab(X) \to Ab$ el functor de secciones globales. Se definen los functores cohomología $H^i(X,-)$ como el functor derivado derecho de $\Gamma(X,-)$. Dado $\mathcal{F} \in Ab(X)$, los grupos $H^i(X,\mathcal{F})$ son los grupos de cohomología de $\mathcal{F}$.

Def: $X$ = esp. top., $\mathcal{F} \in Ab(X)$ es flasque si $V \subseteq \mathcal{U} \Rightarrow \mathcal{F}(\mathcal{U}) \to \mathcal{F}(V) \to 0$.

Lema: $(X,\mathcal{O}_X)$ esp. anillado $\Rightarrow$ inyectivo $\mathcal{O}_X$-mod es flasque.

dem: Para $\mathcal{U} \subseteq X$ abierto, tenemos $\mathcal{O}_\mathcal{U}$ y en $X$ $j_!(\mathcal{O}_X|_\mathcal{U}) =: \mathcal{O}_\mathcal{U}$ (tal que fuera de $\mathcal{U}$ es cero). Sea $\mathcal{F}$ inyectivo y $V \subseteq \mathcal{U}$
$\Rightarrow 0 \to \mathcal{O}_V \to \mathcal{O}_\mathcal{U} \Rightarrow \underset{\mathcal{F}(\mathcal{U})}{\underset{\parallel}{Hom(\mathcal{O}_\mathcal{U},\mathcal{F})}} \to \underset{\mathcal{F}(V)}{\underset{\parallel}{Hom(\mathcal{O}_V,\mathcal{F})}} \to 0$ ■

Prop: $\mathcal{F}$ flasque $\Rightarrow H^i(X,\mathcal{F}) = 0 \quad \forall i>0$.

dem: $0 \to \mathcal{F} \to \mathcal{I}$ = inyectivo y sea $\mathcal{G} = \mathcal{I}/\mathcal{F}$. Como $\mathcal{I}$ es flasque $\Rightarrow \mathcal{G}$ es flasque también. Como $\mathcal{F}$ es flasque, $0 \to \mathcal{F} \to \mathcal{I} \to \mathcal{G} \to 0 \Rightarrow 0 \to \Gamma(\mathcal{F}) \to \Gamma(\mathcal{I}) \to \Gamma(\mathcal{G}) \to 0$. Más aún, $H^i(X,\mathcal{I}) = 0 \ \forall i>0 \Rightarrow H^1(X,\mathcal{F}) = 0$
(II, Ex. 1.16b) Hart. También por suc. larga $H^i(X,\mathcal{F}) = H^{i-1}(X,\mathcal{G}) \ \forall i \geq 2 \Rightarrow$ inducción ■

$\therefore$ Cohomología puede ser calculada con haces Flasque (acíclicos)

Prop: $(X,\mathcal{O}_X) \Rightarrow \Gamma(X,-) : Mod(X) \to Ab$ tiene funt. der. derecho $= H^i(X,-)$.

Dem: El punto es que los inyectivos de $Mod(X)$ podrían ser distintos a los de $Ab(X)$, pero al ser Flasques, permiten calcular la cohom. $H^i(X,-)$ y así coinciden ■

Obs: $(X,\mathcal{O}_X)$ esp. anillado y $A = \Gamma(X,\mathcal{O}_X) \Rightarrow \forall \mathcal{F}$ $\mathcal{O}_X$-mod. tenemos que $\Gamma(X,\mathcal{F})$ es $A$-módulo $\Rightarrow$ todos los grupos de cohomología serán $A$-módulos! también $X \to Spec\, B$ $\Rightarrow$ serán $B$-módulos. En particular pensar en variedades $X \to Spec\, k$, $k$ cuerpo $\Rightarrow H^i(X,\mathcal{F})$ son $k$-esp. vectoriales //