Seminario Geom. Algebraica
9/5/14

→ Morfismos planos:

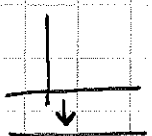
- M A-módulo es plano si $N \hookrightarrow P$ A-módulos $\Rightarrow N\otimes M \hookrightarrow P\otimes M$
  A módulos $\Longleftrightarrow$ Para todo ideal finitamente generado $\mathfrak{a} \subseteq A$,

$$\mathfrak{a} \otimes M \hookrightarrow A\otimes M \cong M$$

Ej 1.- (1) Todo módulo libre es plano (en particular si A = cuerpo)

(2) Todo módulo proyectivo es plano (loc. libre: $\Leftrightarrow \exists P'$ A-modulo tal que $P \oplus P'$ es libre)
↳ $\forall N \twoheadrightarrow M$ $\forall P \to M$ $\exists$ $P \to N$ $\searrow$ $\downarrow$ M

(3) Por ejemplo, $\underset{A}{\underset{\parallel}{k[X]}} \hookrightarrow k[X,Y]/(XY) = M \Rightarrow M$ no es plano



ya que $(x)\otimes M \longrightarrow M$ envía $x\otimes y \neq 0$ a $xy = 0$.
(mirar $k[x,y,t]/(xy, xt-t^2) \ni ty \neq 0$)

- Para morfismos de esquemas $X \xrightarrow{f} Y$, la definición de flat rescata la propiedad local:

$$M \text{ } A\text{-flat} \iff M_p \text{ } A_p\text{-flat} \quad \forall p \in \mathrm{Spec}(A).$$

(1) $\mathcal{F}$ $\mathcal{O}_X$-módulo es plano sobre Y en $x \in X$ si $\mathcal{F}_x$ es $\mathcal{O}_{Y,y}$-plano con $f(x) = y$ y usando $f^\#: \mathcal{O}_{Y,y} \to \mathcal{O}_{X,x}$.

(2) $\mathcal{F}$ plano sobre Y si lo es $\forall$ punto.

(3) $X \longrightarrow Y$ deformación si $\mathcal{O}_X$ es plano.

→ Una deformación de X_0 es un morfismo plano $X \to Y$ = conexo tal que X_0 es una fibra $\left(\begin{smallmatrix} X_0 & \subset & X \\ \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \in & Y \end{smallmatrix}\right)$. Deformaciones "reales" pasan cuando Y tiene dim ≥ 1, siendo el caso más básico $Y = \mathrm{Spec}(k[t])$.

obs.- Un M $k[t]$-módulo es plano $\Leftrightarrow$ para $m \in M$ y $p(t) \in k[t]$
$m \cdot p(t) = 0 \Rightarrow m = 0$ ó $p(t) = 0$ (ie libre de torsión).

(Ver ejemplo arriba (3)) En general tenemos:

Prop(9.7) (Hartshorne) $X \xrightarrow{f} Y$ = integral, regular y dim 1, X = reducido.
Entonces, f es plana $\Leftrightarrow$ toda componente de X domina a Y.

Ejl.- Fibraciones en superficies son todas planas (familias de curvas parametrizadas sobre una curva lisa).

Ejl.- $X_0 = \operatorname{Spec}\left(k[x_1,\dots,x_n]/(f)\right)$ $\quad X_t = \operatorname{Spec}\left(k[t,x_1,\dots,x_n]/(f+tg)\right)$

$$\Rightarrow \quad \begin{matrix} X_0 & \subset & X_t \\ \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \in & \mathbb{A}^1 \end{matrix} \quad \text{deformación de } X_0 \text{ ssi } \lambda g \neq f \text{ con } \lambda \in k^*$$

, es decir, "casi todo es una deformación de X_0".

(La clave es mirar $(t+\lambda)\cdot F = 0$ en $k[t,x_1,\dots,x_n]/(f+tg)$. Si fuese plana $\Rightarrow$ F tiene que estar en (f); aquí $\lambda \in k^*$.
luego $(t+\lambda)F = (a_0 + a_1(t+\lambda) + \dots + a_n(t+\lambda)^n)(f \mp \lambda g + (t+\lambda)g)$
$\Rightarrow$ (estamos en $k[t,x_1,\dots,x_n]$) $f - \lambda g = 0$ y $a_0 g \in I$ (gratis)
, ie, $f = \lambda g$.)

Pero en general con $k[x_1,\dots,x_n]/I$ no será tan simple. Por otro lado, $\mathbb{A}^1$ es "muy grande" para mirar deformaciones de un X_0 dado, y por cambio de base lo podríamos mirar sobre anillos locales en 0 y cocientes de ellos: $k[t] \to k[t]_{(t)} \to k[t]_{(t)}/\text{ideal}$
lo más pequeño es $k[t]/(t^2)$.

$\rightarrow$ Deformaciones sobre $k[t]/(t^2)$: Aquí sí decidimos cuando podemos hacerlo. Luego la idea será "reconstruir una deformación completa" a partir de "infinitesimales".

Dato: $\quad B = k[x_1,\dots,x_n] \supset I = (f_1,\dots,f_m)$
queremos que en $B' = k[t,x_1,\dots,x_n]/(t^2)$ exista I' con
(1) $B' \to B$ envía $I' \mapsto I$ $\quad (I' \otimes_{k[t]/t^2} k \simeq I)$
(2) B'/I' es plano sobre $k[t]/(t^2)$.

(1) significa $B/I \simeq B'/I' \otimes_{k[t]/t^2} k$, y (2) da

$$0 \to (t) \to k[t]/t^2 \to k \to 0 \quad \Big/ \otimes B'/I' \quad k[t]/t^2\text{-módulo}$$

$$\underset{\text{(plano)}}{\Rightarrow} \quad 0 \to B'/I' \otimes_{k[t]/t^2} (t) \simeq B/I \otimes_k (t) \to B'/I' \to B/I \to 0 \quad \text{exacta}$$

, ie, $\quad 0 \to B/I \xrightarrow{t} B'/I' \to B/I \to 0$ exacta

$\Big(\Leftrightarrow, \quad t \cdot F = 0$ en $B'/I' \Leftrightarrow F \in I \Big)$

→ Codificación : $\underset{\substack{\text{de Spec}B/I \text{ sobre} \\ \text{Spec}\,k[t]/t^2}}{\overset{\text{Deformaciones}}{(\text{Plano})}} \underset{1-1}{\Leftrightarrow} \mathrm{Hom}_B(I, B/I)$.

$\Rightarrow$) Dada deformación, creamos $\varphi : I \to B/I$, $\varphi(x) = y$ donde $x + ty \in I'$ es un levantamiento de x. La clave es que $ty \in I' \Leftrightarrow y \in I$ por ser plano, y así está bien definido como morfismo de B-módulos

$\Leftarrow$) Dado $\varphi \in \mathrm{Hom}_B(I, B/I)$, definir $I'_\varphi = \{ x + ty : \varphi(x) \overset{\text{o elegir!}}{=} y \in I \}$ (es ideal y $tF = 0$ en $B'/I' \Rightarrow tF = x + ty$ ie $\varphi(0) - F \in I$ ie $F \in I$) (también $I'_\varphi \mapsto I$)

Con esta codificación rescatamos plano sobre $k[t]/(t^2)$ eliminando el $k[t]/(t^2)$, solo depende de $I \subset B$. También notar que

$$\mathrm{Hom}_B(I, B/I) \equiv \mathrm{Hom}_{B/I}(I/I^2, B/I)$$

y sheafificando para situación global tenemos

$$Y \subset X \qquad \mathcal{H}om_Y(\mathcal{I}/\mathcal{I}^2, \mathcal{O}_Y) =: \mathcal{N}_{Y/X} \quad \text{(haz normal)}$$

Teo : $Y \subset X$ subesquema cerrado ; $Y \subset X$ sobre k.

$$\left\{ \begin{array}{c} \text{deformaciones de } Y \subset X \\ \text{sobre } k[t]/(t^2) \end{array} \right\} \underset{1-1}{\equiv} H^0(Y, \mathcal{N}_{Y/X})$$

Ejlr (afín) Dado $\varphi \in \mathrm{Hom}_{B/I}(I/I^2, B/I)$ con $I=(f_1,\dots,f_m)$
$\Rightarrow$ tenemos $g_i := \varphi(f_i)$ y $I'_\varphi = (f_i + t g_i)$.

¡ Esa es la manera correcta de asignar g_i's para $t^2=0$!

Ejl.- si $Y \subset X$ ~~esquema~~ esquema cerrado definido por un divisor efectivo Cartier D $\Rightarrow$ $\mathcal{I}_Y \simeq \mathcal{O}(-D)$ y

$0 \to \mathcal{O}(-D) \to \mathcal{O} \to \mathcal{O}_Y \to 0 \Rightarrow 0 \to \mathcal{O}(-D)\otimes\mathcal{O}(-D) \to \mathcal{O}(-D) \to \mathcal{O}(-D)|_Y \to 0$
$\Rightarrow \mathcal{I}/\mathcal{I}^2 \simeq \mathcal{O}_X(-D)|_Y \quad \therefore \mathrm{Hom}_Y(\mathcal{O}_X(-D)|_Y, \mathcal{O}_Y) \simeq \mathrm{Hom}_Y(\mathcal{O}_Y, \mathcal{O}_X(D)|_Y)$
$\simeq H^0(Y, \mathcal{O}_X(D)|_Y)$ (en efecto $N_{Y|X} \simeq \mathcal{O}_X(D)|_Y$)

Por ejemplo si $Y \subset X$ curva nosing proy. en una superficie
$\Rightarrow \deg(\mathcal{O}_X(D)|_Y) = D\cdot D$ y si este es $<0 \Rightarrow H^0(Y, \mathcal{O}_X(D)|_Y) = 0$
es decir, es <u>rígida</u> dentro de X.