6/9/2013 ① (Robert)

X = esp. top. Noeth , $\dim X = n$
$\mathcal{F}$ = haz gr. abelianos
$\Rightarrow H^i(X,\mathcal{F}) = 0 \quad \forall i > n$.

→ límites directos : I = conjunto dirigido (parcialmente ordenado y $\forall i,j\ \exists k\ k \geq i,j$)
Un sist. directo si A_i son grupos abelianos, $f_{ij}: A_i \to A_j$ (homo) $\forall i \leq j$ tq
(1) $f_{ii} = 1\!\!1_{A_i}$ (2) $f_{jk} \circ f_{ij} = f_{ik}$.

límite directo : objeto X junto a morfismos $\varphi_i : A_i \to X$ tq $\varphi_j f_{ij} = \varphi_i$
y si (Y, ψ_i) es otra colección que satisface lo mismo $\Rightarrow \exists!\, u : X \to Y$
tq
$$\begin{tikzcd} X \arrow[d, "u"'] & A_i \arrow[l, "\varphi_i"'] \arrow[dl, "\psi_i"] \\ Y & \end{tikzcd}$$
. $X := \varinjlim A_i$.

Si $\mathcal{C} = \mathcal{A}b$, $\varinjlim A_i := \bigsqcup_i A_i / \sim$ $\quad \underset{A_i}{\overset{x_i}{\scriptstyle\cap}} \sim \underset{A_j}{\overset{x_j}{\scriptstyle\cap}}$ si $\exists\, k \geq i,j$ tq $f_{ik}(x_i) = f_{jk}(x_j)$

Ejlo. I = abiertos $\ni x$ en un esp. top X , $\mathcal{F}$ haz
$\Rightarrow \mathcal{F}_x = \varinjlim_{\mathcal{U} \ni x} \mathcal{F}(\mathcal{U})$

→ $\{\mathcal{F}_\alpha, f_{\alpha\beta}\}_{\alpha,\beta \in I}$ sistema directo de haces : $\varinjlim \mathcal{F}_\alpha := \mathcal{U} \mapsto \varinjlim \mathcal{F}_\alpha \mathcal{U}$

X es noetheriano $\Rightarrow \varinjlim \mathcal{F}_\alpha$ es haz.

Def: $\mathcal{F}$ haz es flasque si $\forall V \subseteq \mathcal{U}$, $\mathcal{F}(\mathcal{U}) \twoheadrightarrow \mathcal{F}(V)$ sobre.

Lema: X = Noeth , $\mathcal{F}_\alpha$ flasque $\Rightarrow \varinjlim \mathcal{F}_\alpha$ es Flasque.

dem: Para grupos , $\varinjlim$ es un functor exacto.
$$\begin{array}{c} \varinjlim \mathcal{F}_\alpha(\mathcal{U}) \twoheadrightarrow \varinjlim \mathcal{F}_\alpha(V) \\ \| \\ (\varinjlim \mathcal{F}_\alpha)(\mathcal{U}) \twoheadrightarrow (\varinjlim \mathcal{F}_\alpha)(V) \end{array}$$
■

X = noetheriano, $\{\mathcal{F}_\alpha\}$ sist. de grupos abelianos.
$\Rightarrow$ hay isom natural: $\varinjlim H^i(X,\mathcal{F}_\alpha) \xrightarrow{\sim} H^i(X, \varinjlim \mathcal{F}_\alpha)$.

demj. $\mathcal{F}_\alpha \to \varinjlim \mathcal{F} \Rightarrow H^i(X,\mathcal{F}_\alpha) \to H^i(X, \varinjlim \mathcal{F}_\alpha)$

$\Rightarrow \varinjlim H^i(X,\mathcal{F}_\alpha) \to H^i(X, \varinjlim \mathcal{F}_\alpha)$ ... ✓ ver Hartshorne ∎

Lema: $Y \subseteq X$ cerrado, $\mathcal{F}$ = haz en Y,
$j: Y \hookrightarrow X$. Entonces $H^i(Y,\mathcal{F}) = H^i(X, j_*\mathcal{F})$.

Demh. $\mathcal{J}^\circ$ resolución flasque de $\mathcal{F}$ en Y
$\Rightarrow j_*\mathcal{J}^\circ$ " " " $j_*\mathcal{F}$ en X $\Rightarrow \Gamma(Y,\mathcal{J}^i) = \Gamma(X, j_*\mathcal{J}^i)$
por definición ∎

Defh. $Y \hookrightarrow X$ cerrado, $\mathcal{F}$ haz en X. $\mathcal{F}_Y = j_*(j^{-1}\mathcal{F})$
$\mathcal{U} \hookrightarrow X$ abierto, $\mathcal{F}_\mathcal{U}(V) = \begin{cases} 0, & \text{si } V \not\subseteq \mathcal{U} \\ \mathcal{F}(V), & \text{si } V \subseteq \mathcal{U} \end{cases}$

$\therefore$ Si $\mathcal{U} = X \setminus Y$, $0 \to \mathcal{F}_\mathcal{U} \to \mathcal{F} \to \mathcal{F}_Y \to 0$ (*)

Paso 1: Reducir a X irred.

Si Y = Comp. irred. de X, $\mathcal{U} = X \setminus Y$ y usar sucesión larga en cohom. para (*) [inducción sobre # componentes].

Paso 2: Si $\dim X = 0$ X irred X = pto. El único abierto de X es X. $Ab(X) = Ab$.

$\mathcal{F}(X) = A \in Ab$ $\quad 0 \to A \to \mathcal{J}^1 \to \mathcal{J}^2 \to \cdots$
$\Rightarrow$ cohomología es 0 después de tomar secciones globales (ya que nos quedamos con lo mismo).

Paso 3 : X ired de dim n y $\mathcal{F} \in Ab(X)$. Sea $B = \bigcup_{\mathcal{U} \subseteq X} \mathcal{F}(\mathcal{U})$ (3)

$\alpha \in A = \{$ subconj. finitos de $B\}$, $\alpha = \{s_{\mathcal{U}}, t_V, \dots, r_W\}$.

$\mathcal{F}_\alpha :=$ haz más pequeño de $\mathcal{F}$ que cont. los elementos de α.

$\Rightarrow$ A es un conjunto dirigido (con la inclusión usual) y $\boxed{\varinjlim \mathcal{F}_\alpha = \mathcal{F}}$.

Pero $\varinjlim H^i(X, \mathcal{F}_\alpha) = H^i(X, \mathcal{F})$. Basta probarlo para $\mathcal{F}_\alpha$.

Si $\alpha' \subseteq \alpha$ tenemos, $0 \to \mathcal{F}_{\alpha'} \to \mathcal{F}_\alpha \to \mathcal{G} \to 0$

$\mathcal{G} =$ haz más pequeño en $\mathcal{F}/\mathcal{F}_{\alpha'}$ que genera la imagen $\mathcal{F}_\alpha$

$\boxed{\begin{array}{l} V \supseteq \mathcal{U} \quad \alpha = \{s_{\mathcal{U}}\} \\ \mathcal{F}_{s_{\mathcal{U}}}(V) = 0 \\ \mathcal{F}_{s_{\mathcal{U}}}(\mathcal{U}) = \mathbb{Z} s_{\mathcal{U}} \end{array}}$

Basta probarlo para $\#\alpha = 1$

$\rightarrow$ $\langle s_{\mathcal{U}} \rangle = \mathcal{F}_{s_{\mathcal{U}}} =: \mathcal{F}$ (abuso de notación).

$\exists \quad \mathbb{Z}_{\mathcal{U}} \overset{\psi}{\twoheadrightarrow} \mathcal{F} \qquad V \subseteq \mathcal{U}, \quad \mathbb{Z}(V) \to \mathcal{F}(V)$
$\qquad m \mapsto m(s|_V)$.

$\therefore \quad 0 \to \mathcal{R} = \ker \psi \to \mathbb{Z}_{\mathcal{U}} \to \mathcal{F} \to 0$

$\therefore$ basta probar para $\mathcal{R}$ y $\mathbb{Z}_{\mathcal{U}}$.

$\rightarrow$ Sea $\underset{\neq 0}{\mathcal{R}} \subseteq \mathbb{Z}_{\mathcal{U}} \quad \underset{d_x\mathbb{Z}}{\mathcal{R}_x} \leq \mathbb{Z} \quad \forall x \in \mathcal{U}$ $\Rightarrow$ Sea d el menor d_x $\forall x \in \mathcal{U}$.

$\Rightarrow \exists$ abto $V \subseteq \mathcal{U}$ tq $\boxed{\mathcal{R}|_V \simeq d\mathbb{Z}_V}$

$\Rightarrow 0 \to \mathbb{Z}_V \to \mathcal{R} \to \underbrace{\mathcal{R}/\mathbb{Z}_V}_{\text{supp} \subseteq \overline{\mathcal{U} \setminus V}} \to 0$

cerrado de dim $< n$ (X ired.)

$\Rightarrow$ hipótesis inducción $H^i(\mathcal{R}/\mathbb{Z}_V) = 0$ si $i \geq n$.

$\therefore$ Basta para $\mathbb{Z}_U$

$Y = X \setminus U \Rightarrow 0 \to \mathbb{Z}_U \to \mathbb{Z} \to \underbrace{\mathbb{Z}_Y}_{\text{hipótesis de inducción}} \to 0$

$$\therefore \underbrace{H^{i-1}(\mathbb{Z}_Y)}_{0} \xrightarrow{i>n} H^i(\mathbb{Z}_U) \to \underbrace{H^i(\mathbb{Z})}_{0}$$

0 ya que $\mathbb{Z}$ es flasque ya que X es irreducible

$\Downarrow$

$H^i(\mathbb{Z}_U)$

$\forall i > n$.