Seminario Deformaciones 16-MAYO-2014

→ Definición de morfismo plano = deformación a través de módulos planos.
→ Sobre Spec $k[t]$ ⇝ sobre Spec $k[t]/t^2$ = deformaciones infinitesimales

$$B/I \text{ deforma en } B'/I' \iff 0 \to B/I \xrightarrow{t} B'/I' \quad (\text{sobre Spec } k[t]/t^2) \qquad (\Leftrightarrow t\cdot F = 0 \text{ en } B'/I' \Rightarrow F \in I)$$

$$\text{Hom}_B(I, B/I) \equiv \text{Hom}_{B/I}(I/I^2, B/I)$$

Si $B/I = k[x_1,\dots,x_n]/(f_1,\dots,f_m)$ y $\varphi \Rightarrow B'/I' = k[t,x_1,\dots,x_n]/(f_1+tg_1,\dots,f_m+tg_m)$

$\varphi(f_i) = g_i \quad t^2=0$

Globalizar : $Y \subset X$ esquema cerrado, $\mathcal{I}_Y$ = haz de ideales de Y
$\Rightarrow \mathcal{H}om_Y(\mathcal{I}_Y/\mathcal{I}_Y^2, \mathcal{O}_Y) =: \mathcal{N}_{Y|X}$ haz normal de Y en X y

$$\left\{\begin{matrix}\text{deformaciones de } Y \text{ en } X \\ \text{sobre Spec } k[t]/t^2\end{matrix}\right\} \underset{1\text{-}1}{\equiv} H^0(Y, \mathcal{N}_{Y|X})$$

→ Deformaciones isomorfas sobre base :
tal que $X_0 = f(X_0) = X_0'$.

$$\begin{tikzcd} X_0 \arrow[r, phantom, "\subset"] \arrow[d] & X \arrow[r, "f"] \arrow[d] & X' \arrow[r, phantom, "\supset"] \arrow[d] & X_0 \arrow[d] \\ 0 \arrow[r, phantom, "\in"] & T \arrow[r, equal] & T \arrow[r, phantom, "\ni"] & 0 \end{tikzcd}$$

Def.- Una deformación $\begin{matrix} X_0 \subset X \\ \downarrow \quad \downarrow \\ 0 \in T\end{matrix}$ es trivial si es isomorfa a $\begin{matrix} X_0 \times T \\ \downarrow \\ T\end{matrix}$.

Caso afín : $B/I = k[x_1,\dots,x_n]/(f_1,\dots,f_m)$, $\varphi = 0 \in \text{Hom}_{B/I}(I/I^2, B/I)$

$B'/I' = k[t]/t^2[x_1,\dots,x_n]/(f_1,\dots,f_m)$ es trivial.

Como debemos mantener X_0 igual $\Rightarrow$ isomorfismo tiene que tener la forma $t \mapsto t \quad x_j \mapsto x_j + t\,\delta_j(x)$ para algunos $\delta_j(x)$: esto ya es un isomorfismo con inverso $t \mapsto t$, $x_j \mapsto x_j - t\,\delta_j(x)$

$$\therefore \quad I' = \big(\underset{f_1+tg_1}{f_1(x+t\delta)}, \dots, \underset{f_m+tg_m}{f_m(x+t\delta)}\big)$$

$$\Rightarrow \quad \sum_j \frac{\partial f_i}{\partial x_j}\,\delta_j(x) = g_i(x) \pmod{I}$$

$$\Rightarrow \quad T_{\mathbb{A}^n}\big|_X \longrightarrow N_{X/\mathbb{A}^n}, \quad \sum \delta_j(x)\frac{\partial}{\partial x_j} \mapsto \Big\{ f_i \mapsto \sum \delta_j(x)\frac{\partial f_i}{\partial x_j} \Big\}$$

<u>Def</u>: Se define el $\mathcal{O}_{X_0}$-módulo $T^1_{X_0}$ (deform. de primer orden de X_0) por $0 \to T_{X_0} \to T_{\mathbb{A}^n}|_{X_0} \to N_{X_0/\mathbb{A}^n} \to T^1_{X_0} \to 0$ exacta.

$\rightarrow$ Sea X = var. afín ie $X = k[x_1,\dots,x_n]/I$ entonces

(1) T^1_X no depende de las coordenadas (hacer cálculo)

(2) Si X es suave $\Rightarrow$ $\Omega^1_{X/k}$ son localmente libres y $0 \to I/I^2 \to \Omega^1_{\mathbb{A}^n}|_X \to \Omega^1_{X/k} \to 0$ con I/I^2 loc. libre $\Rightarrow$ tomar dual y obtener $T_{\mathbb{A}^n}|_X \twoheadrightarrow N_{X/\mathbb{A}^n}$ $\Rightarrow$ $T^1_X = 0$.

(3) Si X es singularidad aislada en $(0,\dots,0)$

$\Rightarrow$ T^1_X es un espacio vectorial de dimensión finita.

(T^1_X es no trivial sobre las singularidades solamente (por (2))) y T^1_X es un $\mathcal{O}_X$-módulo f.g. y reducir a k

<u>Ej</u>: $X = \{f = 0\} \subset \mathbb{A}^n$

$\therefore$ definimos que def. de X sobre $k[t]/t^2$ (y <u>NO</u> sobre $k[t]$) están en biyección con $\mathcal{O}_X \ni g$ (como $f + tg = 0$)

$$\Rightarrow \quad T^1_X = k[x_1,\dots,x_n]\big/\Big(f, \frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}\Big)$$

subejemplo: $X = \{xy = 0\} \subseteq \mathbb{A}^2 \Rightarrow T^1_X = k$

X = suave en $\mathbb{A}^n$ $\Rightarrow$ se ve que $T^1_X = 0$ y sino $\Rightarrow$ $T^1_X \neq 0$.

Si sing es aislada $\Rightarrow$ Nullst. dice T^1_X $\dim_k$ finita

→ Considerar una variedad no singular X (no necesariamente afín).
Luego una deformación de primer orden es
$$\begin{array}{ccc} X & \hookrightarrow & \mathfrak{X} \\ \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \in & \operatorname{Spec} k[t]/t^2 \end{array}$$

- Tomar cubrimiento afín en $\mathfrak{X}$ el cual restringe a $X = \bigcup \mathcal{U}_i$, $\mathcal{U}_i$ afines.
- Tenemos deformación de los $\mathcal{U}_i$ sobre $\operatorname{spec} k[t]/t^2$.
- Los $\mathcal{U}_i$ es son nosingulares $\Rightarrow$ $\mathfrak{X}|_{\mathcal{U}_i} \underset{f_i}{\simeq} \mathcal{U}_i \times \operatorname{Spec}(k[t]/t^2)$
- En $\mathcal{U}_i \cap \mathcal{U}_j$, tenemos $f_i \cdot f_j^{-1} \in \operatorname{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\underbrace{\Omega^1_{\mathfrak{X}|\operatorname{spec} k[t]/t^2}}_{\Omega^1_X}, \mathcal{O}_X)|_{\mathcal{U}_i \cap \mathcal{U}_j}$

  y así tenemos un 1-cociclo para $\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\Omega^1_{\mathfrak{X}|\operatorname{spec} k[t]/(t^2)}, \mathcal{O}_X)$
  $= \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\Omega^1_X, \mathcal{O}_X) =: \mathcal{T}_X \Rightarrow$ un elemento en $H^1(X, \mathcal{T}_X)$.
- En efecto esta asignación es biyección. Luego,

<u>Teo</u>: X var. no singular. $\{\text{Def. de } X \text{ sobre } k[t]/(t^2)\} \equiv H^1(X, \mathcal{T}_X)$.

<u>obs</u>) Para X var. singulares el trabajo será mayor. $\left(\begin{array}{l} H^1(X,\mathcal{T}_X) \text{ puede ser } 0 \text{ y defom} \neq 0 \end{array}\right)$

<u>obs</u>) Para $X =$ Curva proyectiva nosingular $\mathcal{T}_X \simeq \mathcal{O}(-K_X) \Rightarrow \dim_k H^1(X, \mathcal{T}_X) = 3g - 3$ si $g \geq 2$.

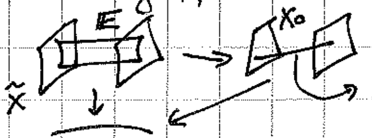
<u>obs</u>) $0 \to \mathcal{O} \to \mathcal{O}(1)^{n+1} \to T_{\mathbb{P}^n} \to 0 \Rightarrow h^0(T_{\mathbb{P}^n}) = (n+1)(n+1) - 1 = \dim \operatorname{Aut}(\mathbb{P}^n)$
$H^i(T_{\mathbb{P}^n}) = 0 \quad \forall i > 0 \Rightarrow \mathbb{P}^n$ es <u>rígido</u>.

<u>obs</u>) Si $\tilde{X} \xrightarrow{\sigma} X$ es un blow-up en un punto suave de X y $E = \mathbb{P}^1$ excepcional $\Rightarrow 0 \to \sigma^*\Omega^1_X \to \Omega^1_{\tilde{X}} \to \omega_E \to 0$
$\therefore \otimes \Omega^2_{\tilde{X}}$ y $R^i\sigma_*(\Omega^2_{\tilde{X}} \otimes \sigma^*\Omega^1_X) = \begin{cases} \Omega^2_X & i = 0 \\ 0 & i \geq 1 \end{cases}$
$\Rightarrow 0 \to H^0(T_{\tilde{X}}) \to H^0(T_X) \to H^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(1)) \to H^1(T_{\tilde{X}}) \to H^1(T_X) \to 0$

y $\quad H^2(T_{\tilde X}) = H^2(T_X)$. Si char $k=0$ y X tipo general
$\Rightarrow H^0(T_X)=0 \quad \Rightarrow \quad \dim H^1(T_{\tilde X}) = \dim H^1(T_X) + 2$.
(En char $p>0$ podríamos tener, y hay ejemplos, $H^0(T_X)\neq 0$)

Notar que en general para una variedad suave, una sección de $\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\Omega_X, \mathcal{O}_X)$ equivale a un Automorfismo infinitesimal X. Por ejemplo en $\mathbb{P}^2_k$ tomar $\begin{bmatrix} 1 & \frac{t}{1+t^2} & \frac{t^2}{t} \\ & & 1+t \end{bmatrix}$: En efecto $H^0(\mathbb{P}^2, T_{\mathbb{P}^2})$ tiene la misma dimensión que $\mathrm{Aut}(\mathbb{P}^2)$.

$\therefore$ Para $\tilde X \xrightarrow{\sigma} X$ blow-up como arriba tenemos o bien
(1) X tiene $H^0(X, T_X)$ y así una tal def. será trivial para $\tilde X$
o (2) X tiene $H^0(X, T_X)=0$ y luego deformaciones triviales donde se "mueve" el punto a ser reventado genera def. no trivial en $\tilde X$
(aunque la (-1)-curva aparecería como divisor en el 3-fold deformación $\Rightarrow$ contraer y quedar con deformación trivial para X.



cierta fam. "no trivial" constante.

$\rightarrow$ Obstrucción: El problema es extender deformaciones infinitesimales de "varios órdenes" (orden por orden) y luego tener deformaciones "de verdad". La primera parte tiene obstrucciones medibles.