Anulación de Serre (1)

Robert A.
~~13~~ 9-2013

Teo: $X = \operatorname{Spec} A$ Noetheriano, $\mathcal{F}$ haz cuasi-coherente en X
$\Rightarrow H^i(X, \mathcal{F}) = 0 \quad \forall i > 0$.

Recordar: $QC(\operatorname{Spec} A) \simeq \operatorname{Mod}(A)$
$$\tilde{M} \leftarrow M$$

Lema: Si I es un A-módulo inyectivo. $\forall f \in A$, $I \to I_f$ es sobre.
Dem: mirar Hartshorne ∎

Prop.: Si I es un A-módulo inyectivo, A Noetheriano
$\Rightarrow \tilde{I}$ es flasque en $\operatorname{Spec}(A)$.
$(\forall V \subseteq \mathcal{U},\ \tilde{I}(\mathcal{U}) \to \tilde{I}(V)$ es sobre$)$.

Dem/ $Y = \overline{(\operatorname{Supp} \tilde{I})} = \overline{\{x \in X : \tilde{I}_x \neq 0\}}$.
Suponer Y = punto $\Rightarrow$ obvio.
Caso general basta probar $\Gamma(X, \tilde{I}) \to \Gamma(\mathcal{U}, \tilde{I}) \to \Gamma(V, \tilde{I})$ es sobre $\forall \mathcal{U}$.
luego usar Lema anterior ∎

$\left\{\begin{array}{l} \text{Usar lema: } \Gamma_Z(X, \tilde{I}) \text{ es inyectivo } (= \{m \in I : f^n m = 0 \text{ algún } n > 0\}. \\ \text{además } \operatorname{supp} \Gamma_Z(X, \tilde{I}) \subseteq Y \cap Z \subsetneq Y \ \therefore \text{ usar "inducción Noetheriana"} \\ \Rightarrow \widetilde{\Gamma_Z(X, \tilde{I})} \text{ es flasque} . \end{array}\right\}$

Teo: $X = \operatorname{Spec} A$, A Noeth $\Rightarrow \mathcal{F}$ cuasi-coherente en $X \Rightarrow H^i(X, \mathcal{F}) = 0 \ \forall i > 0$.

dem/ $\mathcal{F} = \widetilde{\Gamma(X, \mathcal{F})}$. $0 \to \Gamma(X, \mathcal{F}) = M \to I^\circ$ resolución inyectiva de M /
$0 \to \tilde{M} \to \tilde{I}^\circ$ es suce. exacta de haces.
Pero los $\tilde{I}$ son flasque $\Rightarrow$ calculan la cohomología
pero eso NOS DEVUELVE $0 \to M \to I^\circ$ EXACTA
$\Rightarrow H^0(X, \tilde{M}) = M \quad H^i(X, \tilde{M}) = 0 \quad \forall i > 0$ ∎

(Serre)

Teo X = esquema Noetheriano. Los sigu. son equiv:

(1) X afín (2) $H^i(X,\mathcal{F})=0$ $\forall \mathcal{F}$ QC, $i>0$ (3) $H^1(X,\mathcal{I})=0$ $\forall$ haz de ideales coherente $\mathcal{I}$.

dem) (1) $\Rightarrow$ (2) $\Rightarrow$ (3)

(3) $\Rightarrow$ (1). Criterio de afinesa: X es afín $\Leftrightarrow \exists f_1,\dots,f_r \in \Gamma(X,\mathcal{O}_X)$ tq $X_{f_i}=\{x\in X : f_i|_x \notin m_x\}$ son afines y $(f_1,\dots,f_r)=(1)$.

Sea $p\in X$ cerrado, $\mathcal{U}$ vecindad de $\{p\}$, $Y=X\setminus\mathcal{U}$. Tenemos

$0\to \mathcal{I}_{Y\cup\{p\}} \to \mathcal{I}_Y \to \kappa(p)\to 0$ $\quad \kappa(p)=\mathcal{O}_p/m_p$

Por hipótesis, usando suc. larga, $\Gamma(X,\mathcal{I}_Y)\to\kappa(p)$ sobre. $(H^1(X,\mathcal{I}_{Y\cup\{p\}}))$

$\exists f\in\Gamma(X,\mathcal{I}_Y)\subseteq\Gamma(X,\mathcal{O}_X)$ tq $\varphi(f)=1$

Se tiene $X=\bigcup_{p\in X} X_{f_p}$ ya que X es Noetheriano $\Rightarrow X$ quasi-compacto, y así $\exists f_1,\dots,f_r$ tq $X=\bigcup_{i=1}^{r} X_{f_i}$, $X_f = \mathcal{U}_{\bar f}$ $\left(= \operatorname{Spec}\Gamma(\mathcal{U},\mathcal{O}_X)_{\bar f}\right)$, $\bar f$ = imagen de f en $\Gamma(\mathcal{U},\mathcal{O}_X)$.

p.d.: $(f_1,\dots,f_r)=\Gamma(X,\mathcal{O}_X)$.

$\alpha: \mathcal{O}_X^r \to \mathcal{O}_X$ es sobre porque $\exists i$ $f_i=1$ en tallos.

$(a_1,\dots,a_r)\mapsto \sum_{i=1}^r a_i f_i$

$\Rightarrow \quad 0\to\mathcal{F}=\ker\alpha\to\mathcal{O}_X^r\to\mathcal{O}_X\to 0$

¿ ~~Por hipótesis~~ basta probar que $H^1(X,\mathcal{F})=0$.

Considerar $\mathcal{F}\cap\mathcal{O}_X^r=\mathcal{F}\supseteq\mathcal{F}\cap\mathcal{O}_X^{r-1}\supseteq\dots\supseteq\mathcal{F}\cap\mathcal{O}_X$

$$\mathcal{F}\cap\mathcal{O}_X^j \big/ \mathcal{F}\cap\mathcal{O}_X^{j-1} \subseteq \mathcal{O}_X^j\big/\mathcal{O}_X^{j-1}\simeq\mathcal{O}_X$$

↳ haz de ideales coherente. (Porque X es Noetheriano)

$$0 \to \mathcal{F} \cap \mathcal{O}_X \to \mathcal{F} \cap \mathcal{O}_X^2 \to \mathcal{J}_1 \to 0$$

$$\Rightarrow \;\dots \to \underset{\overset{\|}{0}}{H^1(\mathcal{F} \cap \mathcal{O}_X)} \to H^1(\mathcal{F} \cap \mathcal{O}_X^2) \to \underset{\overset{\|}{0}}{H^1(\mathcal{J}_1)} \to \cdots$$

$$\Rightarrow \overset{\|}{0}$$

y así seguimos hasta llegar a $\mathcal{F}$ ∎