Obstrucción. [mirar §10 HARTSHORNE] "Deformation theory" (23/MAYO/14)

→ Un anillo conmutativo con 1 es Artin $\Leftrightarrow$ es Noetheriano y su dimensión es cero. (Ver Atiyah-Macdonald §8.) Si A es anillo local Noetheriano con ideal maximal $\mathfrak{m}$ $\Rightarrow$ $\mathfrak{m}^n \neq \mathfrak{m}^{n+1}$ $\forall n$ ó $\mathfrak{m}^n = 0$, y A es Artin.

→ Engrosemos nuestras deformaciones sobre anillos de Artin locales: $k[t]/(t^2)$ era el primero de ellos.

<u>Def</u>| X esquema sobre k, $C' \twoheadrightarrow C$ entre anillos de Artin locales $|k$. Entonces
$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, hook] \arrow[d] & \mathfrak{X}' \arrow[d] \\ \operatorname{Spec} k \arrow[r, phantom, "\in"] & \operatorname{Spec} C' \end{tikzcd}$$
<u>extiende</u>
$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, hook] \arrow[d] & \mathfrak{X} \arrow[d] \\ \operatorname{Spec} k \arrow[r, phantom, "\in"] & \operatorname{Spec} C \end{tikzcd}$$
si existe
$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, hook] \arrow[dr, hook] \arrow[dd] & & \mathfrak{X}' \arrow[dd] \\ & \mathfrak{X} \arrow[ur, hook] \arrow[dd] & \\ \operatorname{Spec} k \arrow[rr] & & \operatorname{Spec} C' \\ & \operatorname{Spec} C \arrow[ur, hook] & \end{tikzcd}$$
conmutativo tal que induce $\mathfrak{X} \xrightarrow{\sim} \mathfrak{X}' \times_{C'} C$. Dos extensiones son <u>isomorfas</u> si $\exists$ isom $|_{C'}$ respetando inclusiones de X.

El juego es entonces: Dada deformación
$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, phantom, "\subset"] \arrow[d] & \mathfrak{X} \arrow[d] \\ 0 \arrow[r, phantom, "\in"] & \operatorname{Spec} C \end{tikzcd}$$
y $C' \twoheadrightarrow C \to 0$,
(1) ¿Cuándo existe tal sobre C'? (2) ¿Cuántas de esas hay?

→ <u>Caso afín</u> (local): $X = \operatorname{Spec} B_0$, $B_0 = k[x_1, \dots, x_n]/I_0$

$\mathfrak{X} = \operatorname{Spec} B$, $B = C[x_1, \dots, x_n]/I$ y las deformaciones potenciales de $C' \twoheadrightarrow C$ (fijo) son $\mathfrak{X}' = \operatorname{Spec} B'$, $B' = C'[x_1, \dots, x_n]/I'$

$$I = (f_1, \dots, f_r) \quad \text{y} \quad I' = (f_1', \dots, f_r')$$

Consideraremos $0 \to J \to C' \to C \to 0$ con $J^2 = 0$ donde el criterio de <u>plano</u> (Prop. 2.2 p.10 Hartshorne) funciona, ie, $C' \twoheadrightarrow C$ con $J^2 = \text{kernel}^2 = 0$. Entonces M' C'-módulo es plano $\Leftrightarrow$ $M = M' \otimes_{C'} C$ es plano sobre C.
y $M \otimes_C J \hookrightarrow M'$.

Claves son las relaciones, y sus levantamientos, de I e I'.

Sea $R = C[x_1,\dots,x_n]$, $R' = C'[x_1,\dots,x_n]$, $R_0 = k[x_1,\dots,x_n]$

$\Rightarrow$ Sucesiones de relaciones:
$$0 \to Q \to R^r \xrightarrow{f} I \to 0 \qquad f(r) = r\cdot f$$
$$0 \to Q' \to R'^r \xrightarrow{f'} I' \to 0 \qquad f'(r') = r'\cdot f'$$

Luego $\otimes_{C'}$ con R'^r, R', B', tenemos diagrama exacto conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
 & & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
 & & Q' \arrow[r] \arrow[d] & Q \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & R_0^r\otimes_k J \arrow[r] \arrow[d] & R'^r \arrow[r] \arrow[d, "f'"] & R^r \arrow[r] \arrow[d, "f"] & 0 \\
0 \arrow[r] & R_0\otimes_k J \arrow[r] \arrow[d] & R' \arrow[r] \arrow[d] & R \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & B_0\otimes_k J \arrow[r] \arrow[d] & B' \arrow[r] \arrow[d] & B \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

Levantamiento de relaciones para un f' dado

$\Downarrow$

B' es C'-modulo plano (y así deformación) $\iff B_0\otimes J \hookrightarrow B'$

obs: Si $C' = k[t]/(t^{n+1}) \to C = k[t]/(t^n)$ $\Rightarrow$ $\iff$ $F\cdot t^n = 0$ en B'
$\Updownarrow$
$F \in I_0$

$\rightarrow$ Luego por la serpiente tenemos $\delta_0 : Q \to B_0\otimes_k J$. Si $B_0\otimes_k J \hookrightarrow B'$ $\Rightarrow$ $\delta_0 = 0$ trivialmente. Si $\delta_0 = 0$ $\Rightarrow$ $B_0\otimes_k J \hookrightarrow B'$ (simplemente seguir el diagrama.

$\rightarrow$ Hay ciertos $Q_K \subset Q$ que van a dar a cero en $B_0\otimes_k J$ a través de δ_0 siempre. Estos están generados por relaciones de Koszul $(\dots,-f_j,\dots,f_i,\dots) \overset{f}{\mapsto} -f_j\cdot f_i + f_i\cdot f_j = 0$ los cuales siempre se levantan a $(\dots,\overset{i}{-f'_j},\dots,\overset{j}{f'_i},\dots)$. Luego mirar $\delta_0 \in \mathrm{Hom}_{C'}(Q/Q_K, B_0\otimes_k J)$.

$\rightarrow$ Por otro lado, independiente del diagrama y para construirlo podemos considerar $\gamma \in \mathrm{Hom}_{C'}(R^r, B_0\otimes_k J)$ lo cual factoriza a $R^r \to R_0\otimes_k J$ dando $g_1,\dots,g_r$. Tomar $I' = (f_i - g_i)$, hacer lo de arriba y probar que el δ dado es cero $\Rightarrow$ es deformación extensión de B sobre C.

Como los valores son salvo I, considerar $y \in \mathrm{Hom}_{C'}(R^r/IR^r, B_0 \otimes J)$.

$\therefore$ de $Q/Q_K \to R^r/IR^r$ tenemos $\mathrm{Hom}_{C'}(R^r/IR^r, B_0\otimes J) \xrightarrow{\alpha} \mathrm{Hom}_{C'}(Q/Q_K, B_0\otimes J)$

y se define $T^2_{X, C' \twoheadrightarrow C} := \mathrm{coker}(\alpha)$.

Luego, $\begin{array}{c} B \\ | \\ C' - C \end{array}$ tiene obstrucción para $\begin{array}{ccc} B' & - & B \\ | & & | \\ C' & - & C \end{array}$ en $\mathrm{coker}(\alpha)$

- La obstrucción para $\begin{array}{ccc} B' & \overset{f'}{-} & B \\ | & & | \\ C' & - & C \end{array}$ <u>no</u> depende de f' sino de $\begin{array}{c} B \\ | \\ C' - C \end{array}$.
- Si $\delta = 0$ en $\mathrm{coker}(\alpha)$ $\Rightarrow$ tenemos $g_1, \dots, g_r$ a través de $R^r \to R_0 \otimes_k J$
- Se puede mostrar que esto es independiente del ambiente R y que $T^2_{X, C' \twoheadrightarrow C} \simeq T^2_X \otimes J$ con $T^2_X = \mathrm{Coker}(\mathrm{Hom}_k(R_0^r/IR_0^r, B_0) \to \mathrm{Hom}_k(Q_0/Q_{0K}, B_0)) \otimes J$

<u>obs</u>/.- Si $\mathrm{Hom}_k(Q_0/Q_{0K}, B_0) = 0 \Rightarrow T^2_X = 0 \Rightarrow$ no hay obstrucción $\forall$ extensión $C' \twoheadrightarrow C$ con $J^2 = 0$. Ésto pasa por ejemplo si $Q = Q_K$, y esto es lo que se llama intersección completa ($I_0 = (f_1, \dots, f_m)$ sucesión regular con $m = n - \dim X$) (por definición es equiv.)
$\therefore$ T^2_X tiene soporte donde X no es localmente intersección completa.

<u>obs</u>/.- De acuerdo con Schelessinger "On rigid sing." p.150, si Ω_X son los diferenciales si X es integral normal de dimensión positiva $\Rightarrow$ $\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}_X}(\Omega_X, \mathcal{O}_X) \simeq T^1_X$ y $\mathrm{Ext}^2_{\mathcal{O}_X}(\Omega_X, \mathcal{O}_X) \simeq T^2_X$.

Resumen: Dado
$$\begin{array}{ccccc} X & \hookrightarrow & \mathcal{X} & \hookrightarrow & \mathcal{X}' \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ k & \to & C & \to & C' \end{array}$$

(1) Automorfismos de $\begin{array}{c}\mathcal{X}' \\ | \\ C'\end{array} \equiv T^0_X \otimes J$

(2) Extensiones no isomorfas de $\begin{array}{c}\mathcal{X} \\ | \\ C\end{array}$ (a $\begin{array}{c}\mathcal{X}' \\ | \\ C'\end{array}$) $\equiv T^1_X \otimes J$

(3) Obstrucción para extender $\begin{array}{c}\mathcal{X} \\ | \\ C - C'\end{array}$ (a $\begin{array}{ccc}\mathcal{X} & - & \mathcal{X}' \\ | & & | \\ C & - & C'\end{array}$) $\equiv T^2_X \otimes J$

obs/.- T^2_X codifica obstr. pero puede ser que $T^2_X \neq 0$ y obstr. sean todas 0

→ Globalizar: En un esquema X sobre k, consideramos los haces T_X^i definidos por cartas afines. Nos preguntamos lo mismo para $0 \to J \to C' \to C \to 0$ con $J^2=0$.

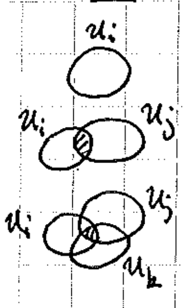
Teo (p.81 Hartshorne):

(Obst) (a) Existen 3 obstrucciones sucesivas para la existencia de una extensión $\mathcal{X}'$ de $\mathcal{X}$ sobre C', las cuales pertenecen a $H^0(X, T_X^2\otimes J)$, $H^1(X_0, T_X^1\otimes J)$ y $H^2(X, T_X^0\otimes J)$.

(Def) (b) Sea $\mathrm{Def}(\mathcal{X}|_C, C')$ las extensiones $\mathcal{X}'|_{C'}$ salvo equivalencia. Entonces existe sucesión exacta

$$0 \to H^1(X, T_X^0\otimes J) \to \mathrm{Def}(\mathcal{X}|_C, C') \to H^0(X, T_X^1\otimes J) \to H^2(X, T_X^0\otimes J).$$

(AUT) (c) Dada extensión $\mathcal{X}'|_C$ de $\mathcal{X}|_C$, $H^0(X, T^0\otimes J)$ es el grupo de automorfismos de $\mathcal{X}'|_{C'}$ el cual es identidad para $\mathcal{X}|_C$.



Dem (a) • Para que exista, $\mathcal{X}=\cup U_i$ U_i afín ∴ obstrucción en $H^0(U_i, T^2_{U_i}\otimes J)$ ⇒ obstr. global en $H^0(X, T_X^2\otimes J)$

• Si esa obstr. es cero ⇒ tenemos U_i' deform. de U_i. Para $U_{ij}=U_i\cap U_j$ tenemos dos def. $U_i'|_{U_{ij}}$ y $U_j'|_{U_{ij}}$ ⇒ la diferencia da un elemento en $H^0(U_{ij}, T^1\otimes J)$ y la diferencia de tres de estos en U_{ijk} es cero ⇒ elemento en $H^1(X, T_X^1\otimes J)$ expresando obstrucción a pegar la deformación.

• Si esto es cero, modificaremos la deformación U_i' para que esté ok en U_{ijk}. Tenemos $\varphi_{ij}: U_i'|_{U_{ij}} \xrightarrow{\sim} U_j'|_{U_{ij}}$. Al componer en U_{ijk} da un automorfismo de $U'_{ijk}|$ fijando U_{ijk} ⇒ elemento en $H^0(U_{ijk}, T^0_{U_{ijk}}\otimes J)$ con U_{ijkl} dando cero, tenemos elemento en $H^2(X, T_X^0\otimes J)$

• Si esto es cero ⇒ tenemos extensión coincidiendo en U_{ij} y U_{ijk} ⇝ extensión global ~~para~~ $\mathcal{X}'|_{C'}$.

(b) (con respecto a def. trivial) Una extensión $\mathcal{X}'|_{C'}$ da para cada U_i ($\mathcal{X}=\cup U_i$ U_i afín) un elemento en $H^0(U_i, T^1\otimes J)$ ⇝ elemento $H^0(X, T_X^1\otimes J)$. Si damos elemento en $H^0(X, T^1\otimes J)$ ⇒ extensiones para cada U_i ⇝ U_i'. Ahora mirar arriba y la diferencia de los ~~$H^0(\ldots)$~~ U'_{ij} es cero ya que el elemento en los $H^0(U_{ij}, T^1\otimes J)$ es cero luego para pegar en triple intersección, tenemos obstrucción en $H^2(X, T^0\otimes J)$. Así $H^0(X,T^1\otimes J) \to H^2(X,T^0\otimes J)$

- Suponer que dos $\mathfrak{X}_1'$ y $\mathfrak{X}_2'$ dan el mismo elemento en $H^0(X,T^1\otimes J)$. Entonces son isomorfos sobre cada U_i, $\varphi_i : \mathfrak{X}_1'|_{U_i} \xrightarrow{\sim} \mathfrak{X}_2'|_{U_i}$, luego (como antes en el caso nosingular!) tenemos $\psi_{ij} = \varphi_j^{-1}\circ\varphi_i$ autom. de $\mathfrak{X}_1'|_{U_{ij}} \rightsquigarrow$ sección en $H^0(U_{ij}, T^0\otimes J)$
Estos están OK en intersecciones $\therefore$ $U_{ijk} \rightsquigarrow$ sección en $H^1(X, T^0\otimes J)$.
- Si ese elemento en $H^1(X, T^0\otimes J)$ es cero entonces aut coinciden en los U_{ij} y así los $\mathfrak{X}_1'$, $\mathfrak{X}_2'$ son globalmente isomorfos ■

$\therefore$ Existe $0 \to H^1(X, T^0\otimes J) \to \mathrm{Def}(\mathfrak{X}|_C, C') \to H^0(X, T^1_X\otimes J) \to H^2(X, T^0\otimes J)$

Corolario! Si X no es singular, entonces:
(a) hay sólo una obstrucción en $H^2(X, T^0_X\otimes J)$ para existencia $\mathfrak{X}'/_{C'}$.
(b) Las extensiones equivalentes se parametrizan por $H^1(X, T^0_X\otimes J)$.

→ Hay algo también para el caso $Y \subset X$ subesquema $/k$ y deformaciones de Y en X : ver Prop. 10.4 y §20 (sobre todo Prop. 20.2).

<u>Lo que viene</u>: Dado X esquema sobre k, queremos deformarlo
$$\begin{array}{ccc} X & \subset & \mathfrak{X} \\ \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \in & S \end{array}$$
con $\dim S \geq 1$. La meta es esa y el proceso general es:

Crear el Functor deformación sobre anillos locales de Artin$/_k$
$\mathrm{Artin}/_k \xrightarrow{F_X} \mathrm{Def}\, X/_{\mathrm{Artin}}/\sim$
→ Existencia de k-alg. local completa R que (pro-)representa F_X (Criterio de Schlessinger)
→ límite "formal" $\mathfrak{X}_F \to \mathrm{Spf}\, R$ para tener algo, aunque como esquema formal (Grothendieck)
→ Efectividad de la familia formal para el caso Proyectivo $\mathfrak{X} \to \mathrm{Spec}\, R$ (Grothendieck)

(hasta aquí grandes pasos pero necesario tener proyectividad, y $\dim \mathrm{Spec}\, R = 0$)

→ Algebrización de Artin: Bajo la hipótesis de Groth. formal
$\Rightarrow$ Finalmente existe
$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{X} & \supset & X \\ \downarrow & & \downarrow \\ S & \ni & 0 \end{array}$$
S tipo finito el cual representa R : $R \simeq \hat{\mathcal{O}}_{S,0}$
Espectacularmente este es el "Moduli local" de X

← ... Abre la Puerta a Moduli global (Polinomio de Hilbert)