27 - Sept - 2013
R. Cookomini

(1)

Cohomología de Čech

→ <u>Obj</u>: construir cohom. calculable que coincida con la usual en ciertos casos.

Sea X = esp. top., $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ cubrimiento abierto. Elegimos un buen orden I y anotamos $\mathcal{U}_{i_0,\dots,i_p} = \mathcal{U}_{i_0} \cap \dots \cap \mathcal{U}_{i_p}$ $i_0,\dots,i_p \in I$

Sea $\mathcal{F}$ haz grupos abelianos $|_X$. Para $p \geq 0$,

$$\alpha \in C^p(\mathcal{U}, \mathcal{F}) = \prod_{i_0 < \dots < i_p} \mathcal{F}(\mathcal{U}_{i_0,\dots,i_p})$$

$\Rightarrow$ $\alpha = (\alpha_{i_0,\dots,i_p})$ y $d : C^p \to C^{p+1}$, $d(\alpha) = \sum_{k=0}^{p+1} (-1)^k \alpha_{i_0,\dots,\hat{i_k},\dots,i_{p+1}}\Big|_{\mathcal{U}_{i_0,\dots,i_{p+1}}}$

<u>Obs</u>.- $d^2\alpha = 0$ usar convenciones $\alpha_{i_0,\dots,i_p} = 0$ se repiten dos índices y $\alpha_{i_0,\dots,i_p} = (-1)^{\operatorname{sgn}(\sigma)} \alpha_{\sigma(i_0),\dots,\sigma(i_p)}$ donde σ es una permutación tq $\sigma(i_0) < \sigma(i_1) < \dots < \sigma(i_p)$.

<u>Def</u>.- Cohomología Čech, $\check{H}(\mathcal{U}, \mathcal{F}) = h^p(C^\bullet(\mathcal{U}, \mathcal{F}))$.

<u>Obs</u>.- $0 \to \mathcal{F}' \to \mathcal{F} \to \mathcal{F}'' \to 0$ exacto no implica suc. exacta larga en la Čech. (Pensar en $\mathcal{U} = \{X\}$ $\check{H}(\mathcal{U}, \mathcal{F}) = \Gamma(X, \mathcal{F})$).

<u>Ej</u>.- Sea $X = \mathbb{P}^1_k$ y Ω el haz de diferenciales $\mathcal{U} = \{\mathbb{A}^1_x, \mathbb{A}^1_y\}$ con $y = \frac{1}{x}$

$$C^0 = \underset{k[x]dx}{\Gamma(\mathcal{U}, \Omega^1)} \times \underset{k[y]dy}{\Gamma(V, \Omega^1)} \quad \text{y} \quad C^1 = \Gamma(\mathcal{U} \cap V, \Omega) = k[x, \tfrac{1}{x}]\,dx$$

$$\Rightarrow \quad 0 \to C^0 \xrightarrow{d_0} C^1 \to 0$$

$$\begin{aligned}
\check{H}^0 = \ker(d_0 : C^0 \to C^1) &= \{ (f dx, g dy) \;/\; d_0 = 0 \} \\
&= \{ \;\text{''}\; / \; g(y)\, dy|_{\mathcal{U}\cap V} - f(x)\, dx|_{\mathcal{U}\cap V} = 0 \} \\
&= \{ \;\text{''}\; / \; g(\tfrac{1}{x}) \tfrac{-1}{x^2} dx = f(x) dx \} \\
&= \{ \;\text{''}\; / \; g = f = 0 \} = 0.
\end{aligned}$$

$\check{H}^1 = C^1/\mathrm{Im}\, d_0$, $\mathrm{Im}\, d_0 = \{ f(x)\,dx + g(\tfrac{1}{x})\frac{dx}{x^2} \ , \ f,g \in k[x] \}$

$\Rightarrow \quad \check{H}^1 = \langle x^{-1} \rangle \simeq k$

Ej.- $X = S^1$, $\mathcal{F}$ = haz const $\mathbb{Z}$, $\mathcal{U} = \{ \underset{\mathcal{U}}{\cap}, \underset{V}{\cup} \}$ $\quad \mathcal{U} \cap V = (\quad)$

$C^0 = \Gamma(\mathcal{F},\mathcal{U}) \times \Gamma(\mathcal{F},V) = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \qquad C^1 = \Gamma(\mathcal{F}, \mathcal{U}\cap V) = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

$0 \longrightarrow C^0 \xrightarrow{d_0} C^1 \longrightarrow 0$

$\check{H}^0 = \ker d_0 = \{ (a,b) : d(a,b) = 0 \} = \{ (a,b) \ ; \ b|_{\mathcal{U}\cap V} - a|_{\mathcal{U}\cap V} = 0 \}$
$= \{ \quad (b-a, b-a) = (0,0) \} \simeq \mathbb{Z}$.

$\check{H}^1 = \mathbb{Z}\times\mathbb{Z} / \langle (1,1) \rangle \simeq \mathbb{Z}$

Lema: $\check{H}^0(\mathcal{U},\mathcal{F}) = \Gamma(X,\mathcal{F})$.

dem: Por definición ($\alpha_i = \alpha_j \ \forall i,j \Rightarrow \exists !\, \alpha$ global) •

Def.- (haciéndolo complejos) Sea $V \subseteq X$ abierto, vamos a denotar por $f : V \hookrightarrow X$. Se define $\mathcal{C}^\bullet(\mathcal{U},\mathcal{F})$,

$$\mathcal{C}^p(\mathcal{U},\mathcal{F}) = \prod_{i_0<i_1<\dots<i_p} f_*(\mathcal{F}|_{\mathcal{U}_{i_0,\dots,i_p}}) \qquad \left(\mathcal{U}_{i_0,\dots,i_p} \xhookrightarrow{f} X \right)$$

obs.- $\Gamma(X, \mathcal{C}^p(\mathcal{U},\mathcal{F})) = C^p(\mathcal{U},\mathcal{F})$, y para d usamos el mismo.

Lema: $\mathcal{C}^\bullet$ es una resolución de $\mathcal{F}$: $\exists\ \varepsilon$ tal que
$0 \to \mathcal{F} \xrightarrow{\varepsilon} \mathcal{C}^0 \xrightarrow{d} \mathcal{C}^1 \xrightarrow{d} \mathcal{C}^2 \longrightarrow \dots$ exacto.

dem:
Sea $V \subseteq X$ abierto, definimos ε por : $\varepsilon(s) = (s|_{\mathcal{U}_i \cap V})_{i\in I}$
con $s \in \mathcal{F}(V)$: ε es inyectivo.
Notar $\ker(\mathcal{C}^0 \to \mathcal{C}^1)(V) = \{ s_i \in \mathcal{F}(\mathcal{U}\cap V) \ \dots \ s \in \mathrm{Im}\,\varepsilon$.
Para el resto, tomar stalks $\mathcal{C}^0_x \to \mathcal{C}^1_x \to \mathcal{C}^2_x \to \dots$ y probar que es exacto con el usando cohomología.

Se construye una $k: \mathcal{C}_x^p \to \mathcal{C}_x^{p-1}$ tal que $\alpha = (dk + kd)\alpha \quad \forall \alpha \in \mathcal{C}_x^p$

$\Rightarrow \quad 1\!\!1_{\mathcal{C}_x^\cdot} \sim 0$ luego $1\!\!1 : \mathcal{C}_x^\cdot \to \mathcal{C}_x^\cdot$ manda todo a cero

$\therefore \quad h^p(\mathcal{C}_x^\cdot) = 0 \quad \forall p.$

$\therefore$ es exacto ∎

<u>Prop</u>: $\mathcal{F}$ flasque $\Rightarrow \check{H}^p = 0 \quad \forall p > 0.$

<u>Dem</u>: Notar que $\forall i_0, \dots, i_p \quad f_*(\mathcal{F}|_{U_{i_0, \dots, i_p}})$ es flasque (prop de flasque)

$\therefore \quad \mathcal{C}^p$ es flasque (prod de flasque es flasque)

$\therefore \quad 0 \to \mathcal{F} \to \mathcal{C}^\cdot$

$\therefore$ Tomar cohomología usual y $\mathcal{F}$ flasque $\Rightarrow H^p(X, \mathcal{F}) = 0 \quad \forall p > 0.$

Luego $\check{H}^p(\mathcal{U}, \mathcal{F}) = h^p(C^\cdot(\mathcal{U}, \mathcal{F})) \quad \forall p$ ∎

<u>Lema</u>: $\exists$ morfismo natural $\check{H}^p(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \to H^p(X, \mathcal{F}) \quad \forall p$ functorial en $\mathcal{F}$.

<u>dem</u>: $0 \to \mathcal{F} \to \mathcal{I}^\cdot$ inyectiva $\quad 0 \to \mathcal{F} \to \mathcal{C}^\cdot$ cadenas locificadas.

$\Rightarrow$ la identidad$|_{\mathcal{F}}$ induce un morfismo de cadenas

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & \mathcal{F} \arrow[r] & \mathcal{I}^\cdot \\ 0 \arrow[r] & \mathcal{F} \arrow[r] \arrow[u, "="] & \mathcal{C}^\cdot \arrow[u] \end{tikzcd} \qquad \therefore \quad \check{H}^p \to H^p$$ ∎

<u>Teo</u>: Sea X = esquema Noeth y separable

$\Rightarrow \mathcal{U} = \{$abiertos afines$\}$ y $\mathcal{F}$ cuasi-coherente,

luego el morfismo del lema es isomorfismo.

<u>Dem</u>: $p = 0$ ✓

$p > 1$: $\mathcal{F}$ ~~[illegible]~~ canónico tomar $\mathcal{G}$ inyectivo y así Flasque tal que (4)

$$0 \to \mathcal{F} \to \mathcal{G} \to \mathcal{R} \to 0$$ cociente exacto.

Int. afines es afín ya que es separable.

$\Rightarrow \mathcal{U}_{i_0,\dots,i_p}$ es afín.

Como $\mathcal{F}$ es cuasi-coherente

$$0 \to \mathcal{F}(\mathcal{U}_{i_0\dots i_p}) \to \mathcal{G}(\mathcal{U}_{i_0,\dots,i_p}) \to \mathcal{R}(\mathcal{U}_{i_0\dots i_p}) \to 0$$

es exacto ya que se toma secciones globales de $0 \to \mathcal{F}|_{\mathcal{U}_{i_0\dots i_p}} \to \mathcal{G}|_{\mathcal{U}_{i_0\dots i_p}} \to \mathcal{R}|_{\mathcal{U}_{i_0\dots i_p}} \to 0$, y se usa anulación de Serre.

$\therefore$ $$0 \to \mathcal{C}^{\cdot}(\mathcal{U},\mathcal{F}) \to \mathcal{C}^{\cdot}(\mathcal{U},\mathcal{G}) \to \mathcal{C}^{\cdot}(\mathcal{U},\mathcal{R}) \to 0$$

$\therefore$ Tomar sucesión larga en cohomología

$$0 \to \check{H}^0(\mathcal{F}) \to \check{H}^0(\mathcal{G}) \to \check{H}^0(\mathcal{R}) \to \check{H}^1(\mathcal{F}) \to \dots$$

Como $\mathcal{G}$ es Flasque $\check{H}^p(\mathcal{G}) = 0 \ \forall\, p \geq 1$.

y $0 \to \check{H}^0(\mathcal{F}) \to \check{H}^0(\mathcal{G}) \to \check{H}^0(\mathcal{R}) \to \check{H}^1(\mathcal{F}) \to 0$

y $\check{H}^p(\mathcal{R}) \simeq \check{H}^{p+1}(\mathcal{F}) \quad \forall p \geq 1$.

basta probar $\check{H}^1(\mathcal{F}) \simeq H^1(\mathcal{F})$ ($\mathcal{R}$ es cuasi-coherente)

y usar ind. sobre p

y comparar con cohomología regular ∎