Criterio de Schlessinger.

- $k=\bar{k}$, $\mathcal{C}$ = categoría de k-álg artinianas locales con cuerpo residual k
  $\hat{\mathcal{C}}$ = categoría de k-álg locales completas con cuerpo residual k.

- R anillo local $\varphi: R \to \hat{R} = \varprojlim R/\mathfrak{m}^n$ $\ker\varphi = \bigcap \mathfrak{m}^n$
  y así $R \in \mathcal{C} \Rightarrow R = \hat{R} \Rightarrow \mathcal{C} \hookrightarrow \hat{\mathcal{C}}$.

- $R \in \hat{\mathcal{C}}$: $h_R : \mathcal{C} \to \mathrm{Sets}$, $A \mapsto \mathrm{Hom}_k(R,A) = \mathrm{Hom}_{\mathrm{Spec}\,k}(\mathrm{Spec}\,A, \mathrm{Spec}\,R)$.

Def: Un functor $F : \mathcal{C} \to \mathrm{sets}$ es <u>Pro-representable</u> si es isomorfo a h_R para algún $R \in \hat{\mathcal{C}}$.

Ej: X esq$|_k$, $x \in X(k)$, $F(A) = \left\{ \begin{array}{c} \mathrm{Spec}(k) \to X \\ \downarrow \nearrow \varphi \\ \mathrm{Spec}\,A \end{array} \right\}$ $F \cong h_{\hat{\mathcal{O}}_{X,x}}$.

<u>Lema</u>: hay una biyección entre $\mathrm{Hom}(h_R, F)$ y elementos de $\varprojlim F(R/\mathfrak{m}^n)$.

<u>Dem</u>: sea $\varphi \in \mathrm{Hom}(h_R, F)$, $R/\mathfrak{m}^{n+1} \to R/\mathfrak{m}^n$

$$\begin{array}{ccc} h_R(R/\mathfrak{m}^{n+1}) & \xrightarrow{\varphi_{n+1}} & F(R/\mathfrak{m}^{n+1}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ h_R(R/\mathfrak{m}^n) & \xrightarrow{\varphi_n} & F(R/\mathfrak{m}^n) \\ \pi_n & \longrightarrow & \xi_n = \varphi_n(\pi_n) \end{array}$$

precompones; π_n (proy.)

(I) $\Rightarrow$ $(\xi_n)_n \in \varprojlim F(R/\mathfrak{m}^n)$.

(II) Si $A \in \mathcal{C}$, $f: R \to A$ es homomorfismo, $f \in h_R(A) \rightsquigarrow \varphi(f) \in F(A)$.
f factoriza: $R \xrightarrow{f} A$, $\exists n$ $\pi_n \searrow R/\mathfrak{m}^n \nearrow g$ $\rightsquigarrow$ $F(R/\mathfrak{m}^n) \xrightarrow{F(g)} F(A)$
$\xi_n \mapsto \varphi(f)$ . . .

- Si $h_R \to F$ isomorfismo inducido por $\xi = (\xi_n) \in \varprojlim F(R/\mathfrak{m}^n)$
  (R,ξ) pro-repr. a F.

Notación: Podemos extender F a $\hat{\mathcal{C}}$ via $\hat{F}(R) = \varprojlim F(R/\mathfrak{m}^n)$

Def: Un par (R, ξ) con $\xi \in \hat{F}(R)$ es una familia $\boxed{\text{versal}}$ para F si $h_R \to F$ es fuertemente suave (ie suave).
Si además $h_R(k[t]/t^2) \to F(k[t]/t^2)$ es biyectivo, (R,ξ) es $\boxed{\text{miniversal}}$ (F tiene una envolvente pro-representable)
(R,ξ) es $\boxed{\text{universal}}$ si pro-repr F.

Def: Un morfismo $G \to F$ es fuertemente suave si $G(A) \to F(A)$ y si $B \to A$ es un hom. suave de anillos $\Rightarrow$

$$\begin{tikzcd} & G(B) \arrow[r] \arrow[d] & F(B) \arrow[d] \\ \exists\theta & G(A) \arrow[r] & F(A) \\ & y \arrow[r] & x \end{tikzcd}$$

Ej: $F: Sch/_k \to Sets$ contravariante
Ej: $F = Hilb$, $Hilb(S) = \{ \mathbb{P}^n_S \supseteq X \to S \text{ planos} \}$

Definimos su functor local si $X_0 \in F(k)$.
$\tilde{F}: \mathcal{C} \to sets$, $A \mapsto \{ X \in F(\operatorname{Spec} A) / X \times_A k = X_0 \}$

F representable $\Rightarrow \tilde{F}$ pro-representable. ($F = Hilb$ por ejemplo)

Ej: X esq$/k$, $Def_X: \mathcal{C} \to Sets$
$A \mapsto \{(X_A, \varphi)\}/\simeq$ donde X_A flat sobre A esq, $\varphi: X \hookrightarrow X_A$ induce un iso. $X \to X_A \times_A \operatorname{Spec} k$.