Cohomología de Espacio Proyectivo

Sebastian Eterović

Resumen

En este documento presentamos algunos cálculos explícitos de la cohomología de haces estructurales $\mathcal{O}(n)$ en un espacio proyectivo usando cohomología de Čech por un cubrimiento abierto afín apropiado. Para más detalles y para las referencias ver *Algebraic Geometry* de Robin Hartshorne, capítulo III sección 5.

Teorema 1. *(III 5.1)*

Sea A anillo noetheriano, $S = A[x_0, \dots, x_r]$, $X = \mathbb{P}^r_A$, $r \geq 1$.

(a) El mapeo natural $S \to \Gamma_*(\mathcal{O}_X) = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} H^0(X, \mathcal{O}_X(n))$ es isomorfismo de S-módulos graduados.

(b) $H^i(X, \mathcal{O}_X(n)) = 0$ para todo $1 \leq i \leq r-1$ y todo $n \in \mathbb{Z}$.

(c) $H^r(X, \mathcal{O}_X(-r-1)) \cong A$.

(d) El mapeo natural $H^0(X, \mathcal{O}_X(n)) \times H^r(X, \mathcal{O}_X(-n-r-1)) \to H^r(X, \mathcal{O}_X(-r-1)) \cong A$, es un emparejamiento perfecto de A-módulos finitamente generados para todo $n \in \mathbb{Z}$.

Demostración. (a) Sea $\mathcal{F} = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} \mathcal{O}_X(n)$, que es un haz cuasi-coherente. Recordar que la cohomología conmuta con la suma directa, por lo que nos dedicaremos a calcular la cohomología de $\mathcal{F}$.

Dado $i \in \{0, \dots, r\}$, sea $U_i = D_+(x_i)$, así cada U_i es un abierto afín de X. Además $\mathcal{U} = \{U_i\}$ es un cubrimiento abierto afín de X. Observar que $U_{i_0,\dots,i_p} = D_+(x_{i_0} \cdots x_{i_p})$. Por teorema (II 5.11 -b) tenemos que $\mathcal{F}(U_{i_0,\dots,i_p}) \cong S_{x_{i_0}\cdots x_{i_p}}$. El complejo de Čech está dado por:

$$C^\cdot(\mathcal{U}, \mathcal{F}) : \prod S_{i_0} \to \prod S_{x_{i_0}x_{i_1}} \to \cdots \to S_{x_0\cdots x_r}$$

Ahora bien, $H^0(X, \mathcal{F})$ es el kernel de la función de la izquierda de este complejo, y por el teorema (II 5.13), obtenemos que este kernel es S.

(b) El resultado se obtiene por inducción en r. El caso $r = 1$ es trivial, así que suponemos $r > 1$.

Si localizamos el complejo $C^\cdot(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ con respecto a x_r, obtenemos el complejo de Čech para el haz $\mathcal{F}|_{U_r}$ en U_r, con respecto al cubrimiento afín $\{U_i \cap U_r : i = 0, \dots, r\}$. Por el teorema (III 4.5) este complejo da la cohomología de $\mathcal{F}|_{U_r}$ en U_r, la cual es 0 si $i > 0$ por (III 3.5). La localización es un functor exacto, así que $H^i(X, \mathcal{F})_{x_r} = 0$ si $i > 0$. Esto significa que todo elemento de $H^i(X, \mathcal{F})$ es aniquilado por una potencia de x_r.

El siguiente paso es mostrar que la multiplicación por x_r es un mapeo biyectivo de $H^i(X, \mathcal{F})$ es si mismo. Cosiderar la sucesión exacta de S-módulos graduados:

$$0 \to S(-1) \xrightarrow{x_r} S \to S/(x_r) \to 0$$

que induce la sucesión exacta de haces en X:

$$0 \to \mathcal{O}_X(-1) \to \mathcal{O}_X \to \mathcal{O}_H \to 0$$

donde H es el hiperplano $x_r = 0$. Twisteamos por todos los $n \in \mathbb{Z}$ y tomamos suma directa para obtener:

$$0 \to \mathcal{F}(-1) \to \mathcal{F} \to \mathcal{F}_H \to 0$$

donde $\mathcal{F}_H = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} \mathcal{O}_H(n)$. Tomando cohomología obtenemos una sucesión exacta larga de la forma:

$$\cdots \to H^i(X, \mathcal{F}(-1)) \to H^i(X, \mathcal{F}) \to H^i(X, \mathcal{F}_H) \to \cdots$$

El mapeo $H^i(X, \mathcal{F}(-1)) \to H^i(X, \mathcal{F})$ es multiplicar por x_r. Notemos que $H \cong \mathbb{P}_A^{r-1}$ y $H^i(X, \mathcal{F}_H) = H^i(H, \bigoplus \mathcal{O}_H(n))$ por (III, 2.10). Aplicamos la hipótesis de inducción a $\mathcal{F}_H$ que dice: $H^i(X, \mathcal{F}_H) = 0$ si $0 < i < r - 1$.

Por la parte (a) se tiene que la sucesión

$$0 \to H^0(X, \mathcal{F}(-1)) \to H^0(X, \mathcal{F}) \to H^0(X, \mathcal{F}_H) \to 0$$

es exacta, ya que $H^0(X, \mathcal{F}_H) = S/(x_r)$. También se tiene la sucesión exacta

$$0 \to H^{r-1}(X, \mathcal{F}_H) \xrightarrow{\delta} H^r(X, \mathcal{F}(-1)) \xrightarrow{x_r} H^r(X, \mathcal{F}) \to 0$$

Ahora bien, $\ker(x_r)$ es el submódulo libre generado por $x_0^{l_0} \cdots x_{r-1}^{l_{r-1}} x_r^{-1}$, con $l_i < 0$. Además $H^{r-1}(X, \mathcal{F}_H)$ es un A-módulo libre con base los monomios negativos en $x_0, \ldots, x_{r-1}$, y δ es dividir por x_r. De la sucesión exacta se tiene que δ es inyectivo. Luego $x_r : H^i(X, \mathcal{F}(-1)) \to H^i(X, \mathcal{F})$ es biyección para $0 < i < r$. Luego $H^i(X, \mathcal{F}) = 0$.

(c) Sea

$$d : \prod_k S_{x_0 \cdots \hat{x_k} \cdots x_r} \to S_{x_0 \cdots x_r}$$

Consideremos $S_{x_0 \cdots x_r}$ como un A-módulo libre con base $\left\{ x_0^{l_0} \cdots x_r^{l_r} : l_i \in \mathbb{Z} \right\}$. La imagen de d es el submódulo libre generado por los elementos basales que tienen al menos un $l_i \geq 0$. Así $H^r(X, \mathcal{F})$ es un A-módulo libre con base los monomios "negativos" $\left\{ x_0^{l_0} \cdots x_r^{l_r} : l_i < 0 \right\}$. Existe un solo monomio de grado $-r-1$ que es $x_0^{-1} \cdots x_r^{-1}$, por lo que $H^r(X, \mathcal{O}_X(-r-1))$ es un A-módulo libre de rango 1.

(d) Por (a) tenemos que si $n < 0$, entonces $H^0(X, \mathcal{O}_X(n)) = 0$, y por (c) tenemos que si $n < 0$ entonces $H^r(X, \mathcal{O}_X(-n-r-1)) = 0$, puesto que $-n-r-1 > -r-1$ y no existen monomios negativos de grado $-n-r-1$. Luego (d) es trivial para $n < 0$.

Para $n \geq 0$, $H^0(X, \mathcal{O}_X(n))$ tiene una base que consiste de $\{x_0^{m_0} \cdots x_r^{m_r} : m_i \geq 0, \sum m_i = n\}$. El emparejamiento está dado por: si $x_0^{l_0} \cdots x_r^{l_r} \in H^r(X, \mathcal{O}_X(-n-r-1))$ y $x_0^{m_0} \cdots x_r^{m_r} \in H^0(X, \mathcal{O}_X(n))$, entonces $x_0^{m_0+l_0} \cdots x_r^{m_r+l_r} \in H^r(X, \mathcal{O}_X(-r-1))$. Observar que si en este emparejamiento se obtiene un elemento tal que todos sus exponenetes $m_i + l_i \geq 0$, entonces $H^r(X, \mathcal{O}_X(-r-1)) = 0$. Además $x_0^{-m_0-1} \cdots x_r^{-m_r-1}$ es elemento basal dual de $x_0^{m_0} \cdots x_r^{m_r}$.

□

Teorema 2. *(II Ex 5.5-c)*

Sean X, Y esquemas noetherianos, $f : X \to Y$ morfismo finito y $\mathcal{F}$ un haz coherente en X. Entonces $f_*\mathcal{F}$ es coherente en Y.

Demostración. Cubrimos X por abiertos afines $X = \bigcup \operatorname{Spec} A_i$. Supongamos que localmente $f : \operatorname{Spec} B \to \operatorname{Spec} A$, con B un A-módulo finitamente generado. Entonces $\mathcal{F}|_{\operatorname{Spec} B} = \widetilde{M}$ para algún A-módulo M finitamente generado. Entonces $f_*\mathcal{F}(\operatorname{Spec} A) \cong B \otimes_A M$. Como B y M son A-módulos finitamente generados, también lo es $B \otimes_A M$. Luego $f_*(\mathcal{F})|_{\operatorname{Spec} B}$ es coherente. □

Teorema 3. *(III Ex 4.8-c-d)*

Sea X un esquema noetheriano separado. Definimos la dimensión cohomológica de X (denotada por $\operatorname{cd}(X)$) como el menor entero $n \geq 0$ tal que $H^i(X, \mathcal{F}) = 0$ para todo haz cuasi coherente $\mathcal{F}$ y todo $i > n$. El teorema de anulación de Serre dice que $\operatorname{cd}(X) = 0$ si y solo si X es afín. Por otro lado el teorema de anulación de Grothendieck dice que $\operatorname{cd}(X) \leq \dim X$.

(a) Si X se puede cubrir por $r+1$ abiertos afines, entonces $\operatorname{cd}(X) \leq r$.

(b) Si X es cuasiproyectivo de dimensión r sobre k, entonces X puede cubrirse por $r+1$ abiertos afines y $\operatorname{cd}(X) \leq \dim X$.

Demostración. (a) Sea $\mathcal{U}$ un cubrimiento abierto afín con $r+1$ elementos. Si $p > r$, no hay p-tuplas de índices $(i_0, \dots, i_p)$ con $i_0 < \cdots < i_p$, así que $C^p(\mathcal{U}, \mathcal{F}) = 0$. Entonces $H^i(X, \mathcal{F}) = 0$ para todo $p > r$, así que $\operatorname{cd}(X) \leq r$.

(b) Sea Y una intersección completa de codimensión r. El complemento de cada una de estas hipersuperficies es un abierto afín, así que estas r hipersuperficies cubren $X - Y$, que es separado ya que X es proyectivo. Sigue de (a) que $\operatorname{cd}(X - Y) \leq r - 1$.

□

Teorema 4. *(III 5.2)*

Sea X un esquema proyectivo sobre un anillo noetheriano A y sea $\mathcal{O}_X(1)$ un haz invertible muy amplio en X sobre $\operatorname{Spec} A$. Sea $\mathcal{F}$ un haz coherente en X. Entonces

(a) Para todo $i \geq 0$, $H^i(X, \mathcal{F})$ es un A-módulo finitamente generado.

(b) Existe $n_0 \in \mathbb{Z}$, que depende de $\mathcal{F}$ tal que para todo $i > 0$ y todo $n \geq n_0$ se tiene que $H^i(X, \mathcal{F}(n)) = 0$.

Demostración. Lo primero es hacer algunas reducciones. $\mathcal{O}_X(1)$ es un haz muy amplio en X sobre $\operatorname{Spec} A$, luego por (II 5.16.1) existe una inmersión de esquemas sobre A $i : X \to \mathbb{P}^r_A$ para algún r, tal que $\mathcal{O}_X(1) = i^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}^r}(1)$. Por otro lado, si $\mathcal{F}$ es coherente en X, entonces $i^*\mathcal{F}$ es coherente en $\mathbb{P}^r_A$ por (II Ex 5.5-c), y la cohomología es la misma por (III 2.10). En conclusión nos podemos reducir al caso $X = \mathbb{P}^r_A$.

Ahora bien si $X = \mathbb{P}^r_A$ entonces (a) y (b) se cumplen para $\mathcal{O}_X(q)$ para todo $q \in \mathbb{Z}$ por (III 5.1). Luego también se cumplen para cualquier suma directa de estos haces.

Para el caso de un haz coherente en general hacemos inducción descendente en i. Para $i > r$ tenemos que $H^i(X, \mathcal{F}) = 0$, ya que X puede ser cubierto por $r+1$ abiertos afines por (III Ex 4.8-c-d).

(a) Sea $\mathcal{F}$ un haz coherente en X. Podemos escribirlo como un cuociente de un haz $\mathcal{A}$, donde $\mathcal{A}$ es la suma directa finita de $\mathcal{O}(q_j)$ para ciertos $q_j \in \mathbb{Z}$, por (II 5.18). Sea $\mathcal{R}$ el kernel para obtener la sucesión exacta:
$$0 \to \mathcal{R} \to \mathcal{A} \to \mathcal{F} \to 0$$
Se concluye que $\mathcal{R}$ es coherente. Obtenemos ahora una sucesión exacta de A-módulos:
$$\cdots \to H^i(X, \mathcal{A}) \to H^i(X, \mathcal{F}) \to H^{i+1}(X, \mathcal{R}) \to \cdots$$
Notamos que $H^i(X, \mathcal{A})$ es finitamente generado porque $\mathcal{A}$ es la suma directa finita de $\mathcal{O}_X(q_j)$. Por otro lado $H^{i+1}(X, \mathcal{R})$ es finitamente generado por hipótesis de inducción. Como A es noetheriano, entonces $H^i(X, \mathcal{F})$ es finitamente generado.

(b) Twisteamos la sucesión encontrada en (a) para obtener
$$\cdots \to H^i(X, \mathcal{A}(n)) \to H^i(X, \mathcal{F}(n)) \to H^{i+1}(X, \mathcal{R}(n)) \to \cdots$$
Para n suficientemente grande $H^i(X, \mathcal{A}(n)) = 0$ pues $\mathcal{A}$ es la suma directa finita de $\mathcal{O}_X(q_j)$. Por otro lado $H^{i+1}(X, \mathcal{R}(n)) = 0$ para n suficientemente grande por hipótesis de inducción. Luego $H^i(X, \mathcal{F}(n)) = 0$ para n suficientemente grande. Como $0 < i \leq r$, entonces escogemos un n_0 para cada i, y al final consideramos el máximo de éstos.

$\square$

Corolario 1. *Para todo hax coherente $\mathcal{F}$ en X, $\Gamma(X, \mathcal{F})$ es un A-módulo finitamente generado.*

Proposición 1. *(III 5.3)*
Sea A un anillo noetheriano y X un esquema propio sobre $\operatorname{Spec} A$. Sea $\mathcal{L}$ un haz invertible en X. Entonces son equivalentes:

(a) $\mathcal{L}$ es amplio.

(b) Para cada haz coherente $\mathcal{F}$ en X existe un entero n_0, que depende de $\mathcal{F}$, tal que para todo $i > 0$ y todo $n \geq n_0$ se tiene que $H^i(X, \mathcal{F} \otimes \mathcal{L}^n) = 0$.

Demostración. (a) $\implies$ (b). Si $\mathcal{L}$ es amplio en X, entonces para algún $m > 0$ se tiene que $\mathcal{L}^m$ es muy amplio en X sobre $\operatorname{Spec} A$ por (II 7.6). Como X es propio sobre $\operatorname{Spec} A$, entonces X es proyectivo por (II 5.16.1). Usamo (III 5.2) para los haces: $\mathcal{F}$, $\mathcal{F} \otimes \mathcal{L}$,..., $\mathcal{F} \otimes \mathcal{L}^{m-1}$ y se obtiene (b).

(b) $\implies$ (a). Dado $\mathcal{F}$, sea $P \in X$ punto cerrado y sea $\mathcal{I}_P$ el haz ideal del cerrado $\{P\}$. Existe sucesión exacta:
$$0 \to \mathcal{I}_P \mathcal{F} \to \mathcal{F} \to \mathcal{F} \otimes k(P) \to 0$$
donde $k(P)$ es el haz rascacielos $\mathcal{O}_X / \mathcal{I}_P$. Tensorizando con $\mathcal{L}^n$ obtenemos
$$0 \to \mathcal{I}_P \mathcal{F} \otimes \mathcal{L}^n \to \mathcal{F} \otimes \mathcal{L}^n \to \mathcal{F} \otimes \mathcal{L}^n \otimes k(P) \to 0$$
Por (b) existe n_0 tal que $H^1(X, \mathcal{I}_P \mathcal{F} \otimes L^n) = 0$ para todo $n \geq n_0$. Luego $\Gamma(X, \mathcal{F} \otimes \mathcal{L}^n) \to \Gamma(X, \mathcal{F} \otimes \mathcal{L}^n \otimes k(P))$ es sobreyectivo para todo $n \geq n_0$. Aplicando el lema de Nakayama al anillo local $\mathcal{O}_P$ se obtiene que el tallo $\mathcal{F} \otimes \mathcal{L}^n$ en P es generado por secciones globales. Como es un haz coherente concluimos que para todo $n \geq n_0$ existe una vecindad abierta U de P, que depende de n, tal que las secciones globales de $\mathcal{F} \otimes \mathcal{L}n$ generan el haz en todo punto de U.

En particular, tomando $\mathcal{F} = \mathcal{O}_X$ encontramos que existe un entero $n_1 > 0$ y una vecindad abierta V de P tal que $\mathcal{L}^n$ es generado por secciones globales sobre V. Por otro lado, para cada $r = 0, \ldots, n_1 - 1$ el argumento anterior da una vecindad U_r de P tal que $\mathcal{F} \otimes \mathcal{L}^{n_0+r}$ es generado por secciones globales sobre U_r. Sea $U_P = V \cap U_0 \cap \cdots \cap U_{n_1-1}$, entonces sobre U_P todos los haces $\mathcal{F} \otimes \mathcal{L}^n$, para $n \geq n_0$, son generados por secciones globales. De hecho cada uno de estos haces se escribe $\mathcal{F} \otimes \mathcal{L}^{n_0+r} \otimes (\mathcal{L}^{n_1})^m$ para algún $0 \leq r < n_1$ y algún $m \geq 0$.

Ahora cubrimos X por un número finito de abiertos U_P. Sea n_0 el máximo de los n_0 obtenidos en cada punto P. Entonces $\mathcal{F} \otimes \mathcal{L}^n$ es generado por secciones globales sobre todo X para todo $n \geq n_0$. $\square$

Definición 1. *Sea X esquema proyectivo sobre un cuerpo k y sea $\mathcal{F}$ un haz coherente en X. Se define la característica de Euler de $\mathcal{F}$:*

$$\chi(\mathcal{F}) = \sum (-1)^i \dim_k H^i(X, \mathcal{F})$$

Proposición 2. *Sea X un esquema proyectivo sobre un cuerpo k. Si $0 \to \mathcal{F}' \to \mathcal{F} \to \mathcal{F}'' \to 0$ es una sucesión exacta de haces coherentes en X, entonces $\chi(\mathcal{F}) = \chi(\mathcal{F}') + \chi(\mathcal{F}'')$.*

Demostración. Consideremos la sucesión exacta larga en cohomología:

$$\cdots \xrightarrow{\delta^{i-1}} H^i(X, \mathcal{F}') \xrightarrow{\phi^i} (X, \mathcal{F}) \xrightarrow{\psi^i} H^i(X, \mathcal{F}'') \xrightarrow{\delta^i} H^{i+1}(X, \mathcal{F}') \to \cdots$$

Como la sucesión es exacta $\dim H^i(X, \mathcal{F}) = \dim \ker \delta^i + \dim \ker \psi^i$. Observermos que la i-ésima cohomología es 0 para $i > \dim X = n$ por el teorema de anulación de Grothendieck. Luego, como $0 = \dim \ker \phi^{n+1} = \dim \ker \phi^0$ se tiene:

$$\begin{aligned}
\chi(\mathcal{F}) &= \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \dim H^i(X, \mathcal{F}) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i (\dim \ker \delta^i + \dim \ker \psi^i) \\
&= \sum_{i=0}^{n} (-1)^i (\dim \ker \delta^i + \dim \ker \psi^i - \dim \ker \phi^i + \dim \ker \phi^i) \\
&= \sum_{i=0}^{n} (-1)^i (\dim \ker \phi^i + \dim \ker \psi^i) + \sum_{i=0}^{n} (-1)^i (\dim \ker \delta^i - \dim \ker \phi^i) \\
&= \sum_{i=0}^{n} (-1)^i (\dim \ker \phi^i + \dim \ker \psi^i) + \sum_{i=0}^{n} (-1)^i (\dim \ker \delta^i + \dim \ker \phi^{i+1}) \\
&= \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \dim H^i(X, \mathcal{F}') + \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \dim H^i(X, \mathcal{F}'') = \chi(\mathcal{F}') + \chi(\mathcal{F}'')
\end{aligned}$$

$\square$

Definición 2. *Sea X esquema proyectivo de dimensión r sobre un cuerpo k. Definimos el género aritmético P_a de X dado por:*

$$P_a(X) = (-1)^r (\chi(\mathcal{O}_X) - 1)$$

Proposición 3. *Sea X esquema integral y proyectivo de dimensión r sobre un cuerpo k algebraicamente cerrado. Entonces $H^0(X, \mathcal{O}_X) \cong k$. En particular, si X es una curva $P_a(X) = \dim_k H^1(X, \mathcal{O}_X)$.*

Demostración. Como X es integral, entonces X es isomorfo a una variedad proyectiva por (II 4.10). Por (I 3.4) se concluye que $\mathcal{O}_X = k$. $\square$

Proposición 4. *Sea X esquema proyectivo sobre k, $\mathcal{O}_X(1)$ haz invertible muy amplio en X sobre k. Sea $\mathcal{F}$ un haz coherente en X. Entonces existe un polinomio $p(z) \in \mathbb{Q}[z]$ tal que $\chi(\mathcal{F}(n)) = p(n)$ para todo $n \in \mathbb{Z}$.*

Demostración. Ejercicio para el lector. $\square$

Proposición 5. *En $\mathbb{P}^r_k$, sea $M = \Gamma_*(\mathcal{F})$, con $\mathcal{F}$ un haz coherente en $\mathbb{P}^r_k$ sobre k. Entonces el polinomio $\chi(\mathcal{F}(n))$ es el mismo que el polinomio de Hilbert de M.*

Demostración. Por (II 5.2-b) para todo $n \geq n_0$ y para todo $i > 0$ tenemos que $H^i(X, \mathcal{F}(n)) = 0$, luego $\chi(\mathcal{F}(n)) = \dim H^0(X, \mathcal{F}(n))$. Por otro lado la definición del polinomio de Hilbert es $P_M(n) = \dim M_n$ para n suficientemente grande. Luego tenemos que para n suficientemente grande $\chi(\mathcal{F}(n)) = P_M(n)$. Se deduce de esto que ambos polinomios son iguales. $\square$

Proposición 6. *Sea X variedad cerradad de $\mathbb{P}^r_k$. Entonces $P_a(X)$ coincide con el género aritmético usual.*

Demostración. Sea P_X el polinomio de Hilbert asociado a X. Por la proposición anterior tenemos que $P_X(0) = \chi(\mathcal{O}_X(0)) = \chi(\mathcal{O}_X)$. Luego $(-1)^r(P_X(0) - 1) = (-1)^r(\chi(\mathcal{O}_X) - 1)$. $\square$

Proposición 7. *Sea X curva no singular proyectiva sobre un cuerpo k algebraicamente cerrado. Entonces $P_a(X)$ es un invariante birracional.*

Demostración. Los invariantes birracionales en curvas no singulares son isomorfismos de esquemas. $\square$