- $\mathcal{C}$ = Cat. de k-álg de artin locales con cuerpo resid. $k=\bar{k}$.
- $\hat{\mathcal{C}}$ = Cat. de k-álg locales completos con " " $k=\bar{k}$.
- $\mathcal{C} \subset \hat{\mathcal{C}}$, Para $R \in \hat{\mathcal{C}} \Rightarrow h_R(A) = Hom_k(R, A)$.

~~Dado~~ $F: \mathcal{C} \to sets$ functor, $\{h_R \to F \text{ homo}\} \overset{1-1}{\longleftrightarrow} \varprojlim F(R/m_R^n)$

Def. - Un par (R, ξ), $\xi \in \varprojlim F(R/m_R^n)$ es una familia
(a) versal si $h_R \xrightarrow{\xi} F$ es fuertemente sobre.
(b) miniversal si es versal y $h_R(k[t]/t^2) \to F(k[t]/t^2)$ es biyectivo.
(c) (R, ξ) prorepresenta a F si $h_R \xrightarrow{\xi} F$ es isomorfismo.

Def. - $F(k[t]/t^2) =: t_F$ espacio tangente de F.

Teo: (Schlessinger) $F: \mathcal{C} \to sets$ tiene una familia miniversal ssi
(H_0) $F(k)$ tiene un elemento
(H_1) $\mathcal{C}: F(A' \times_A A'') \to F(A') \times_{F(A)} F(A'')$ es sobre $\forall$ homo. sobre $A'' \to A$ con $\dim_k \ker = 1$.

[obs: $A' \times_A A'' = \{(x,y) \in A' \times A'' / f_1(x) = f_2(x)\}$
$$\begin{tikzcd} & A'\times_A A'' \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ A' \arrow[dr] & & A'' \arrow[dl] \\ & A & \end{tikzcd}$$
$\Rightarrow$
$$\begin{tikzcd} F(A'\times_A A'') \arrow[r] \arrow[dr] & F(A') \arrow[r] & F(A) \\ & F(A'') \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$
$\mathcal{C} \Leftarrow$]

(H_2) $F(A' \times_k k[t]/t^2) \longrightarrow F(A') \times_{F(k)} F(k[t]/t^2)$ es biyectivo
(H_3) $F(k[t]/t^2)$ es un espacio vectorial de dim. finita.

[Se usa la estructura esp. vectorial natural de $(H_0), (H_1), (H_2)$: Necesitamos $t_F \times t_F \xrightarrow{+} t_F$ y $k \times t_F \xrightarrow{\cdot} t_F$ (ejercicio)]

Además F es pro-repr. ssi además
(H_4) $\forall$ homo sobre $p: A'' \to A$ con $\dim_k \ker p = 1$ y todo $\eta \in F(A)$ tq. $F(p)^{-1}(\eta) \neq \phi$, la acción de t_F en $F(p)^{-1}(\eta)$ es biyectiva.

<u>Acción</u> : $\ker p = I$ $\quad A' \times_A A' \simeq A' \times_k k[I]$ $\quad (x,y) \mapsto (x, x_0 + y - x)$

$x_0 \in k$ es la clase residual de x.

$(H_2) \Rightarrow$ ... mirar Hartshorne.

Ejr $\quad X_0 \subseteq \mathbb{P}^n_k$ fijo (subesq. cerrado), $\quad F(A) = \{ \mathbb{P}^n_A \supseteq X \to A$ plano $/ X \times_A k \cong X_0 \}$

<u>Teo</u>: F es pro-repr

(H_0) $F(k) = \{ \mathbb{P}^n_k \supseteq X \to \operatorname{Spec} k \,/\, X \cong X_0 \} = \{ X_0 \}$

(H_1) Sea $X' \in F(A')$, $X'' \in F(A'')$ tq

$X' \times_{\operatorname{Spec} A'} \operatorname{Spec} A \simeq X'' \times_{\operatorname{Spec} A''} \operatorname{Spec} A$

X^* esp. top. $= X_0$ con haz $\mathcal{O}_{X''} \times_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_{X'}$. $\therefore X^* \subset \mathbb{P}^n_{A'' \times_A A'}$

(H_3) $F(k[t]/t^2) = H^0(X_0, N_{X_0|\mathbb{P}^n})$.

y (H_4) es teorema de Hartshorne.